Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, dimana terdiri dari dua buah kata yaitu trigonom berarti bangun yang mempunyai tiga sudut dan sisi (segitiga) dan metrom berarti suatu ukuran. Dari arti dua kata di atas, trigonometri dapat diartikan sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut.
Trigonometri memiliki banyak penerapan dalam kehidupan sehari-hari, sehingga penting dalam mempelajari trigonometri untuk dapat menyelesaikan permasalahan yang ada dalam kehidupan. Sangat kami sadari buku ini masih jauh dari sempurna, namun akan kami upayakan perbaikan-perbaikan yang perlu, agar ke depan buku ini dapat digunakan lebih luas lagi.

LIMA AKSARA

https://limaaksara.com
penerbitlimaaksara
cvlimaaksara@gmail.com
limaaksara

ISBN 978-623-5555-06-5
9 786235 555065

HOW TO DEAL WITH "TRI-G"

HOW TO DEAL WITH TRI-G

Esty Saraswati Nur Hartiningrum
Nahlia Rakhmawati

HOW TO DEAL WITH "TRI-G"

Esty Saraswati Nur Hartiningrum
Nahlia Rakhmawati

**PENERBIT
LIMA AKSARA**

Judul:
HOW TO DEAL WITH "TRI-G"

Penulis:
Esty Saraswati Nur Hartiningrum
Nahlia Rakhmawati

ISBN 978-623-5555-06-5

Editor:
Dr. Erni Munastiwi, M.M (UIN SUKA Yogyakarta)

Penyunting:
Wening Puspowati

Desain sampul dan tata letak
Limax Media

Penerbit:

Lima Aksara

Redaksi:
Pratama Residence Blok C23/B19 Plosogeneng-Jombang | 0814-5606-0279 | https://limaaksara.com
Distributor tunggal:
CV. Lima Aksara | Pratama Residence Kav C23/B19 Plosogeneng-Jombang | 0857-4666-6795 | IG@limaaksara | Fb: Lima Aksara Indonesia
Anggota IKAPI / No.315/JTI/2021

Cetakan Pertama November 2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT, Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penyusunan buku ini dapat diselesaikan. Buku "How to Deal with TRI-G" ini disusun untuk membantu pemahaman dalam mempelajari trigonometri dan dikemas dalam bahasa yang mudah dipahami oleh pelajar baik di tingkat sekolah maupun mahasiswa

Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, dimana terdiri dari dua buah kata yaitu trigonom berarti bangun yang mempunyai tiga sudut dan sisi (segitiga) dan metrom berarti suatu ukuran. Dari arti dua kata di atas, trigonometri dapat diartikan sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut.

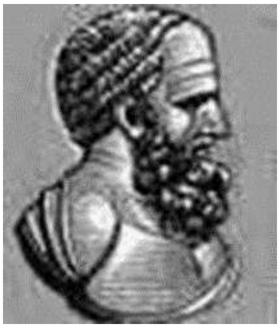
Trigonometri memiliki banyak penerapan dalam kehidupan sehari-hari, sehingga penting dalam mempelajari trigonometri untuk dapat menyelesaikan permasalahan yang ada dalam kehidupan. Sangat kami sadari buku ini masih jauh dari sempurna, namun akan kami upayakan perbaikan-perbaikan yang perlu, agar ke depan buku ini dapat digunakan lebih luas lagi.

Dalam penyusunan buku ini, penulis juga mendapatkan dukungan dan dorongan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terimakasih. Semoga ke depan Buku "How to Deal with TRI-G" dapat memberikan manfaat bagi pembacanya. Terima kasih.

Jombang, 1 September 2020

Penulis

PENDAHULUAN



Trigonometri pada mulanya merupakan kajian tentang segitiga dan diterapkan sebagai tambahan kepraktisan pada astronomi, survey dan navigasi. Peninggalan berupa tablet dari tanah liat bangsa Babilonia dan batang papyrus dari Bangsa Mesir yang menunjukkan tahun sekitar 1600 SM menunjukkan bukti-bukti pemecahan masalah praktis dengan menggunakan pengukuran segitiga.

Ahli Astronomi bangsa Yunani telah berusaha menghilangkan perbandingan di surga ketika mereka sedang menghitung panjang lintasan (orbit) yang dilalui oleh bintang-bintang. Dengann demikian, kajian mereka dalam bidang trigonometri secara praktiknya adalah menggunakan **tabel tali busur** perhitungan periode dan orbit. Seorang astronom yunani, Hipporchus (160-120 SM) berhasil membuat daftar trigonometri. Kemudian, disusul oleh george Bachim Rhaticus (1514-1576), seorang matematikawan Jerman, mempelajari trigonometri menggunakan segitiga siku-siku. Lain halnya dengan matematikawan Inggris, William Oughtred (1514-1660) yang berusaha untuk mengubah pandangan trigonometri dari pandangan secara geometri menjadi pandangan secara aljabar. Pandangan William Ougtred dikembangkan lagi oleh seorang matematikawan yang sangat terkenal, yaitu Leonar Euler (1707-1783), yang berasal dari Swiss, Euler mengembangkan fungsi-fungsi trigonometri dari nisbah panjang suatu garis menjadi suatu bilangan.

Hiparcus (140 SM) yang dikenal sebagai **Bapak Trigonometri** telah menulis 12 buku tentang perhitungan dari tali busur yang berkaitan dengan sudut pusat yang dipotong oleh tali busur itu. Sebagai fakta nyata, ketika mereka berkecimpung dengan masalah-masalah pada ruang dimensi tiga, apa yang mereka bangun biasanya dirujuk sebagai trigonometri bola, ketimbang sebagai trigonometri bidang.


at-Tusi

Studi tentang trigonometri sebagai cabang matematika, lepas dari astronomi pertama kali diberikan oleh Nashiruddin al-Tusi (1201-1274), lewat bukunya *Treatise on the quadrilateral*. Bahkan dalam buku ini ia untuk pertama kali memperlihatkan keenam perbandingan trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis). Menurut O`Conners dan Robertson, mungkin ia pula yang pertama memperkenalkan Aturan Sinus (di bidang datar).

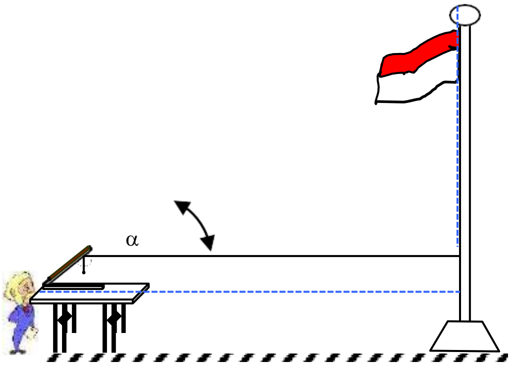
Istilah trigonometri berasal dari kata yunani "trigonos" yang berarti segitiga dan "metron" yang berarti ukuran. Berdasarkan kata-kata pembentuknya, trigonometri diartikan sebagai ukuran segitiga. Trigonometri pada mulanya merupakan kajian tentang segitiga dan diterapkan sebagai tambahan ke-praktisan pada astronomi, survei dan navigasi. Namun, pada perkembangannya trigonometri tidak hanya dikaitkan dengan segitiga saja.

Trigonometri sebagai suatu metode dalam perhitungan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan-perbandingan pada bangun geometri, khususnya dalam bangun yang berbentuk segitiga. Pada prinsipnya trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut, Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, dimana terdiri dari dua buah kata yaitu trigonom berarti bangun yang mempunyai tiga sudut dan sisi (segitiga) dan metrom berarti suatu ukuran. Dari arti dua kata di atas, trigonometri dapat diartikan sebagai cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut. Dalam mempelajari perbandingan sisi-sisi segitiga pada trigonometri, maka segitiga itu harus mempunyai tepat satu sudutnya (90^0) artinya segitiga itu tidak lain adalah segitiga siku-siku.

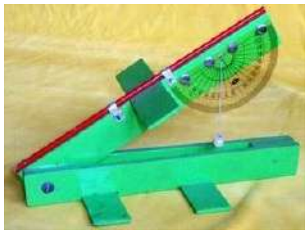
Di Arab dan kebanyakan daerah muslim, trigonometri berkembang dengan pesat tidak saja karena alasan astronomi tetapi juga untuk kebutuhan ibadah. Seperti diketahui, orang muslim jika melakukan ibadah *sholat*, harus menghadap ke arah *Qiblat*, suatu bangunan di kota Mekkah. Para matematikawan muslim lalu membuat tabel trigonometri untuk kebutuhan tersebut.

PENERAPAN TRIGONOMETRI

Seseorang yang ingin mengukur tinggi sebuah pohon, menara, gedung bertingkat ataupun sesuatu yang memiliki ketinggian tertentu maka tidaklah mungkin secara fisik akan mengukur dari bawah ke atas (puncak) obyeknya dengan menggunakan meteran. Salah satu cabang matematika yang dapat dipakai dalam membantu pengukuran ini adalah trigonometri.

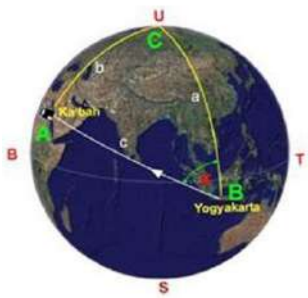


Gb. 1.1. mengukur ketinggian



Gb. 1.2. Klinometer

Gambar 1.1 adalah gambar seorang pengamat yang ingin mengukur tinggi tiang bendera dengan menggunakan klinometer (Gb. 1.2). Dalam pengamatan akan didapat sudut dan jarak pengamat dengan tiang, kemudian dengan bantuan pengetahuan trigonometri maka akan dapat dihitung tinggi tiang tersebut.



Gambar 1.3 menentukan arah kiblat

Ka’bah di makkah adalah tempat suci sebagai arah kiblat patokan beribadah seluruh umat muslim di dunia. Dengan menggunakan konsep trigonometri kita bisa menentukan arah kiblat dari tempat kita berasal dengan tepat.

Kenyataan dalam kehidupan sehari￿hari di berbagai bidang kehidupan banyak membutuhkan pengetahuan tentang trigonometri, antara lain bidang keteknikan, bidang IPA, bidang penerbangan, bidang pelayaran dan sebagainya. Oleh karena itu topik tentang trigonometri perlu diajarkan kepada siswa oleh guru matematika.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR | iii

PENDAHULUAN | iv

PENERAPAN | vii

DAFTAR ISI | viii

BAB 1 UKURAN SUDUT | 1

A. Pengertian Sudut | 1
B. Menggambar dan memberi warna sudut | 2
C. Besar Sudut | 4
D. Penjumlahan dan Pengurangan dalam Satuan Sudut | 6
E. Ukuran Sudut dalam Radian | 7

BAB 2 PERBANDINGAN TRIGONOMETRI | 9

A. Pengertian Dan Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku | 9
B. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Khusus (Istemewa) | 12
C. Perbandingan Trigonometri Di Semua Kuadran | 15
D. Rumus Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut-Sudut Berelasi | 20
E. Identitas Trigonometri | 27

BAB 3 KOORDINAT KUTUB (KOORDINAT POLAR) | 33

Menentukan Koordinat kartesius dan Koordinat Kutub **| 33**

BAB 4 DALIL-DALIL DALAM SEGITIGA | 39

A. Aturan Sinus | 39

B. Aturan Kosinus | 43

C. Luas Segitiga | 47

BAB 5 RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI | 55

A. Jumlah dan selisih dua sudut | 55

B. Rumus trigonometri sudut rangkap | 60

C. Sudut pertengahan | 62

D. Perkalian sinus dan kosinus (bentuk perkalian ke bentuk penjumlahan | 65

E. Penjumlahan sinus dan kosinus (bentuk penjumlahan ke bentuk perkalian) | 68

BAB 6 GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI | 70

A. Domain Fungsi Trigonometri Sederhana | 72

B. Range Fungsi Trigonometri Sederhana | 73

C. Grafik Fungsi Trigonometri Sederhana | 76

D. Periodisitas Fungsi Trigonometri | 81

E. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Trigonometri | 82

F. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri | 82

G. Grafik Fungsi Kf (α) dengan $k \in$ R, $k \neq 0$, atau $k \neq 1$ | 84

H. Grafik Fungsi F(m α), m bilangan real m ≠ 0 atau m ≠ 1 | 87

I. Grafik Fungsi F $(\alpha + \theta)$ dengan θ adalah Sudut Konstan | 89

J. Grafik Fungsi F (α) = g (a) + f (α), g (a) = Fungsi Konstan | 91

K. Grafik Fungsi F (α) = f (α) ± g (α) | 92

BAB 7 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAAMAAN TRIGONOMETRI | 100

A. Persamaan Trigonometri | 100

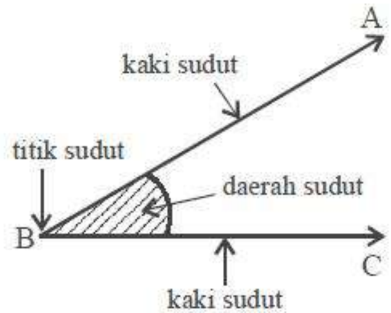
B. Pertidaksamaan Trigonometri | 112

1
UKURAN SUDUT

****

A. Pengertian Sudut

Teman-teman semuanya apa yang ada dibenak teman-teman mengenai sudut, sudut itu sebenarnya ada bnayak sekali disekeliling teman-teman. Coba lihat Kotak pensil yang sering teman-teman gunakan, ada lemari pakaian, coba amati pojokan dari Kotak pensil dan lemari teman-teman, berbentuk apakah ujung dari benda itu? Yub benar sekali itu merupakan contoh dari sudut, nah masih banyak lagi contoh sudut dalam keseharian teman-teman…pojok dari buku ini juga contoh dari sudut juga kan...nah untuk memahami apa itu pengetian sudut, yuk dibaca teman-teman...materi awal ini masih mudah sekali looo pasti teman-teman mudah memahaminya. OK perhatikan gambar dibawah ini.



Gambar 1

Suatu sudut dapat dibentuk dari suatu sinar yang diputar pada pangkal sinar. Sudut ABC pada gambar di samping adalah sudut yang dibentuk BC yang diputar dengan pusat B sehingga BC berputar sampai BA.

Ruas garis BA dan BC disebut kaki sudut, sedangkan titik pertemuan kaki-kaki sudut itu disebut titik sudut. Daerah yang dibatasi oleh kaki-kaki sudut, yaitu daerah ABC disebut daerah sudut. Untuk selanjutnya, daerah sudut ABC disebut besar sudut ABC.

Sudut dinotasikan dengan: "$\angle$". Sudut pada Gambar 1 dapat diberi nama

a. sudut ABC atau $\angle$ ABC;

b. sudut CBA atau $\angle$ CBA;

c. sudut B atau $\angle$ B.

Dengan demikian, dapat dikatakan sebagai berikut. Sudut adalah daerah yang dibentuk oleh pertemuan antara dua buah sinar atau dua buah garis lurus.

B. Menggambar dan Memberi Warna Sudut

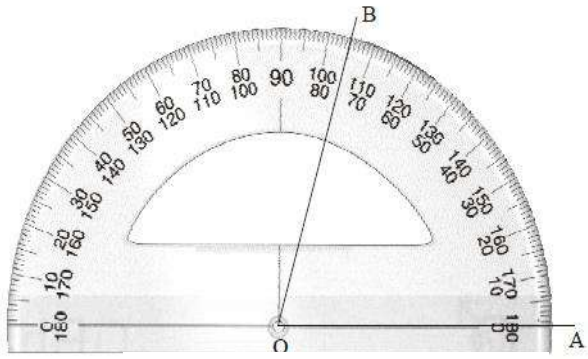
Sediakanlah sebuah busur derajat agar kalian dapat memahami uraian materi berikut dengan baik. Dalam mengukur besar suatu sudut, diperlukan suatu alat yang dinamakan busur derajat.

Pada umumnya, busur derajat terbuat dari mika tembus pandang berbentuk setengah lingkaran. Pada busur derajat terdapat dua skala, yaitu skala atas dan skala bawah. Pada skala atas terdapat angka-angka 0, 10, 20, ..., 180 berturut-turut dari kiri ke kanan, sedangkan pada skala bawah terdapat angka-angka berturut-turut dari kanan ke kiri 0, 10, 20, ..., 180.

1. Mengukur Besar Suatu Sudut

Langkah-langkah dalam mengukur besar suatu sudut sebagai berikut.

Perhatikan Gambar 2 berikut.



Gambar 2

a) Letakkan busur derajat pada sudut AOB sehingga
   1) titik pusat lingkaran busur derajat berimpit dengan titik O;
   2) sisi horizontal busur derajat berimpit dengan sinar garis OA.

b) Perhatikan angka nol (0) pada busur derajat yang terletak pada garis OA. Jika angka nol berada pada skala bawah, perhatikan angka pada skala bawah yang terletak pada kaki sudut OB. Dari gambar tampak bahwa garis OB terletak pada angka 75^o. Jadi, besar sudut AOB = 75^o.

2. Menggambar Besar Suatu Sudut

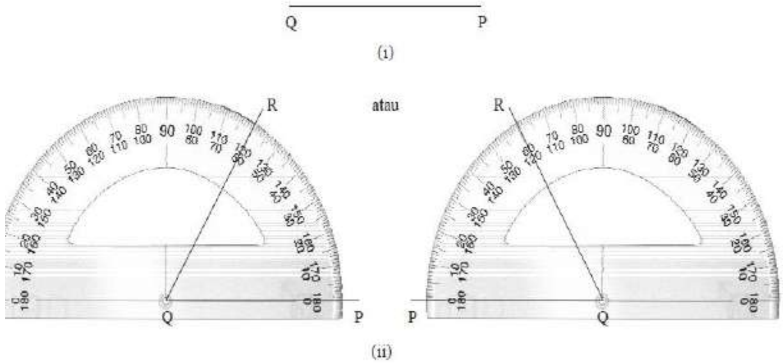
Setelah teman-teman mengetahui cara mengukur besar sudut dengan busur derajat, sekarang teman-teman akan mempelajari cara menggambar sudut. Perhatikan uraian berikut. Misalkan teman-teman akan melukis sudut PQR yang besarnya 6075^o. Langkah-langkah untuk melukis sudut PQR yang besarnya 6075^o sebagai berikut.

a) Buatlah salah satu kaki sudutnya yang horizontal, yaitu kaki sudut PQ.

b) Letakkan busur derajat sehingga
   1) titik pusat lingkaran busur derajat berimpit dengan titik Q;
   2) sisi lurus busur derajat berimpit dengan garis PQ.

3) Perhatikan angka nol (0) pada busur derajat yang terletak pada garis PQ. Jika angka nol (0) terletak pada skala bawah maka angka 60 yang berada di bawah yang digunakan. Jika angka nol (0) terletak pada skala atas maka angka 60 yang berada di atas yang digunakan. Berilah tanda pada angka 60 dan namakan titik R.

4) Hubungkan titik Q dan R. Daerah yang dibentuk oleh garis PQ dan QR adalah sudut PQR dengan besar sudut PQR = 60^o.



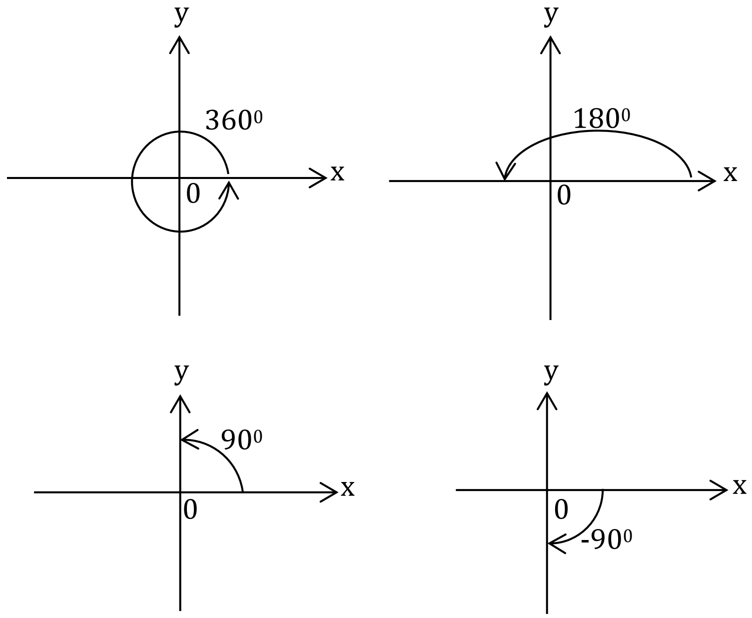
Gambar 3

C. Besar Sudut

Secara umum ada dua satuan pengukuran sudut, yaitu satuan derajat dan satuan radian. Teman-teman ketahui bahwa satu putaran penuh dengan arah yang berlawanan arah perputaran jarum jam adalah 360°. dengan demikian jika busurlingkaran teman-teman bagi menjadi tiga bagian yang sama, maka besarnya tiap sudut pusat yang terjadi adalah 1°.

Besar suatu sudut dapat dinyatakan dalam satuan derajat (o), menit (‘), dan detik (“). Perhatikan jarum jam pada sebuah jam dinding. Untuk menunjukkan waktu 1 jam, maka jarum menit harus berputar 1 putaran penuh sebanyak 60 kali, atau dapat ditulis 1 jam = 60 menit. Adapun untuk menunjukkan waktu 1 menit, jarum detik harus berputar 1 putaran penuh sebanyak 60 kali, atau dapat ditulis 1 menit = 60 detik. Hal ini juga berlaku untuk satuan sudut. Hubungan antara derajat (o), menit (‘), dan detik (“) dapat dituliskan sebagai berikut.

Satuan derajad adalah salah satu ukuran sudut. Bila teman-teman melakukan pengukuran satu putaran penuh yang dimulai dari sumbu x positif dengan arah yang berlawanan jarum jam, maka besarnya sudut yang diukur adalah 360^0. Gambar 4 adalah contoh pengukuran sudut-sudut 360^0, 180^0, 90^0 , -90^0.



Gambar 4

1^0 dibaca satu derajat

1 derajat = 60 menit (ditulis $1^0 = 60'$)

1 menit = 60 detik (ditulis $1' = 60''$)

Contoh soal :

1. Nyatakan besar sudut $32^0\ 15'$ dalam bentuk derajat !

   Penyelesaian:

$$15' = 15 \times \frac{1}{60^0} = 0{,}25^0$$

$$\begin{aligned} 32^0\ 15' &= 32^0 + 15' \\ &= 32^0 + 0{,}25^0 \\ &= 32,\ 25^0 \end{aligned}$$

2. Nyatakan besar sudut $185,\ 45^0$ dalam bentuk derajat, menit, detik!

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 185,\ 45^0 &= 185^0 + 0{,}45^0 \\ &= 185^0 + 0{,}45 \times 60' \\ &= 185^0 + 27' \\ &= 185^0\ 27 \end{aligned}$$

3. Nyatakan 48,41° ini kedalam satuan derajat sampai menit dan detik....

Penyelesaian

$48{,}41° = 48° + 0{,}41°$

$= 48° + (0{,}41x\ 60)'$

$= 48° + 24{,}6'$

$= 48° + (24 + 0{,}6)'$

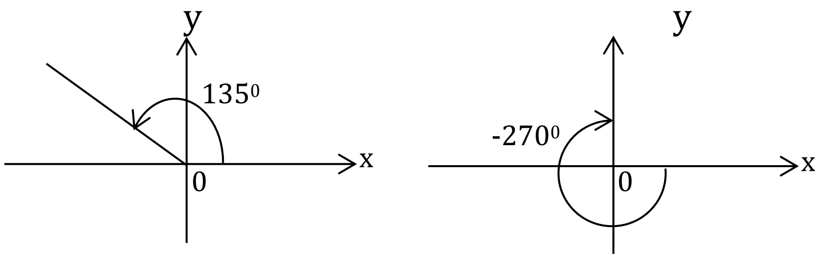
$= 48° + 24' + (0{,}6\ x\ 60)'$

$= 48° + 24' + 36''$

Jadi $48{,}41° = 48° + 24' + 36''$

4. Gambarkan sudut-sudut -270^0 dan 135^0

Penyelesaian:



D. Penjumlahan dan Pengurangan dalam Satuan Sudut

Seperti halnya pada besaran-besaran lainnya, pada satuan sudut juga dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Caranya hampir sama seperti pada penjumlahan dan pengurangan bilangan desimal. Untuk menjumlahkan atau mengurangkan satuan sudut, masingmasing satuan derajat, menit, dan detik harus diletakkan dalam satu lajur

Contoh soal :

Tentukan hasil penjumlahan satuan sudut

$32^0 15' + 42^0 55' =$

Penyelesaian:

$32^0 15' + 42^0 55' = (32^0 + 42^0) + (15' + 55')$

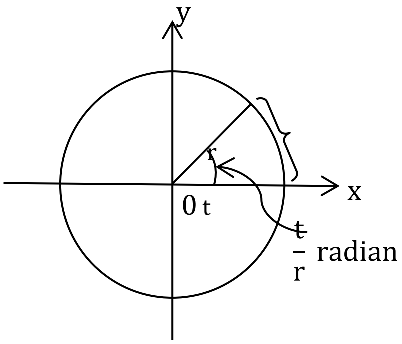
$= 74^0 + 70'$

$= 74^0 + (60' + 10')$

$= 74^0 + (1^0 + 10')$

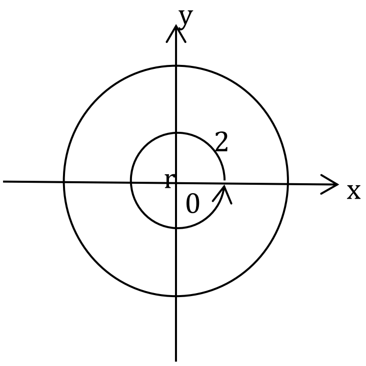
$= 75^0\ 10'$

E. Ukuran Sudut dalam Radian



Gambar 5

Perhatikan sebuah lingkaran yang mempunyai jari-jari r. Dua buah sisi yang mengapit sudut tertentu akan memotong lingkaran dan akan menghasilkan panjang busur tertentu pula (lihat Gambar 5). Jika panjang busur = t maka sudut yang diapit oleh dua sisi yang memotong lingkaran adalah t/r radian.



Gambar 6

Selanjutnya perhatikan Gambar 6. Keliling lingkaran adalah 2πr Berarti sudutnya (satu putaran) adalah 2π radian. Telah teman-teman ketahui bahwa satu putaran sama dengan 360°. Jadi 2π radian = 360°. Selanjutnya didapat,

$$1 \text{ radian } = \frac{180^{o}}{\pi} = 57^{o}17'45''$$

$$t \text{ radian } = \left[\frac{180}{\pi}.t\right]^{o}$$

$360^0 = 2\pi$ rad $\leftrightarrow 1^0 = \frac{2\pi rad}{360^0} \leftrightarrow 1^0 = \frac{\pi rad}{180^0} \approx$ 0.0174 rad.

$$1^{o} = \left[\frac{\pi}{180^{o}}\right] \text{radian}$$

$$\theta^{o} = \left[\frac{\pi}{180^{o}}.\theta\right] \text{radian}$$

CONTOH.

1. Tentukan ukuran sudut pusat suatu juring, jika panjang jari-jari 40 cm dan panjang busur 86 cm.

   Penyelesaian:

   Diketahui: Panjang busur = 86 cm

   Panjang jari-jari = 40 cm

   Ukuran radian = $\frac{\text{panjang busur}}{\text{Panjang jari-jari}}$ = 86 : 40 = 2, 15 rad

2. Ubah sudut 20° kedalam satuan radian!

   Penyelesaian

   $20^o = \left[\frac{\pi}{180^o}.20\right] = \frac{\pi}{9}$ radian

3. Ubah sudut π/6 radian kedalam satuan derajad!

   Penyelesaian

   $\frac{\pi}{6} = \left[\frac{180}{\pi}.\frac{\pi}{6}\right]^o = 30^o$

Ok teman –teman setelah teman-teman mempelajari tentang apa itu sudut dan ukuran sudut dalam derajat dan radian untuk mempermudah teman-teman lebih memahami nya yook di coba latihan soalnya, jangn takut tidak bisa seblum mencobanya. Dijaminn gampil bangett kok....

Soal-soal

1. Ubah sudut-sudut berikut kedalam satuan radian!

   a. 30^o b. 45^o c. 60^o d. 75^o

2. Ubah sudut-sudut berikut kedalam satuan derajad!

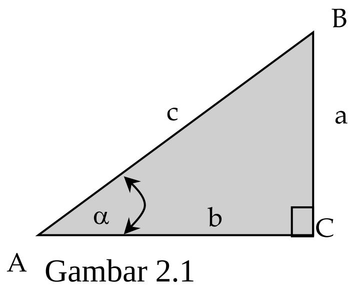
   a. $\frac{\pi}{8}$ radian b. $\frac{\pi}{4}$ radian c. $\frac{\pi}{3}$ radian d. $\frac{\pi}{2}$ radian

2
PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

****

Setelah teman-teman mempelajari apa itu sudut dan bagaimana mengubah ukuran sudut dari derajat ke radian, dan pula sebaliknya pasti teman-teman semuanya mulai tertarik tentang materi selanjutnya, nah materi yang kedua ini akan membahas tentang apa itu perbandingan trigonometri, bagaimana cara mencari nilai dari sudut istimewa, jadi sudut istimewa itu tidak tiba-tiba ada nilainya lho..melainkan ada prosesnya....mulai penasaran kan untuk mendapatkan nilai sudut istimewa????, di pembahasan ini juga teman-teman juga memahami tentang singkatan “**SEMUA CINTAKU**”..gimana makin penasaran kan.....trus penutupnya teman-teman akan diajari kenapa ada yang namanya relasi sudut (hubungan sudut), Jadi tidak hanya teman-teman aja yang mempunyai hubungan dengan teman lain..ihiiir......^_^, sudut pun punya namanya RELASI SUDUT, dari sini nanti bisa dikatakan nilain sin 150 itu akan sama dengan nilai sin 30 kok bisa yaa..yukkkk mulaii membaca lagi makinn seruu lhoo semakin dipelajari. Langsung lanjut membaca dan memahaminya lagi yaaa....

A. Pengertian Dan Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku



Gambar 2.1

Gambar di samping adalah segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah *a*, panjang sisi di hadapan sudut B adalah *b*, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah *c*.

Terhadap sudut α:

Sisi *a* disebut sisi siku-siku di depan sudut α
Sisi *b* disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudut α
Sisi *c* (sisi miring) disebut hipotenusa
Berdasarkan keterangan di atas, didefinisikan 6 (enam) perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut:

1. $\sin\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat (berimpit) sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{a}{b}$
4. $\csc\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$
5. $\sec\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{c}{b}$
6. $\cot\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$

Dari perbandingan tersebut dapat pula ditulis rumus:

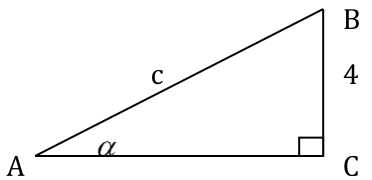
$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dan $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ dan $\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

CONTOH :

1. Diketahui segitiga siku-siku ABC, siku-siku di C, panjang a = 4, b = 3.
   a. Tentukan panjang sisi c
   b. Tentukan nilai perbandingan trigonometri sudut α

Jawab :



$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

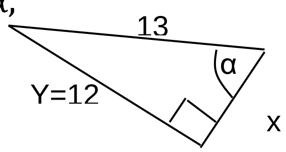
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{4}{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{5}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$

Gambar 2.2

2. Dari segitiga berikut ini, tentukan sin α, cos α, tan α, cot α, sec α dan cosec α.



Gambar 2.3

Jawab :

Diketahui : y = 12 dan r = 13

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$

$= \sqrt{13^2 - 12^2}$

$= \sqrt{169 - 144}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

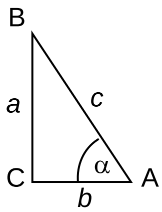
Jadi, $\sin\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{12}{13}$ $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{12}{13}$

$\text{Cos}\,\alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{5}{13}$ $\sec\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{13}{5}$

$\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{12}{5}$ $\cot\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{12}$

3. Pada gambar di samping segitiga siku–siku ABC dengan panjang $a =$ 24 dan $c = 25$.

Tentukan keenam perbandingan trigonometri untuk α.



Gambar 2.4

Jawab:

Nilai *b* dihitung dengan teorema Pythagoras

$b = \sqrt{25^2 - 24^2}$

$= \sqrt{625 - 576}$

$= \sqrt{49} = 7$

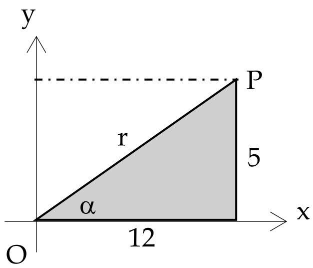
$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{24}{25}$ $\csc\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{25}{24}$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{7}{25}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{25}{7}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{24}{7}$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{24}$

4. Suatu garis OP dengan O (0 ; 0) dan P (12 ; 5) membentuk sudut α terhadap sumbu x positif. Tentukan perbandingan trigonometrinya.

Jawab : $\quad$ r = $\sqrt{112^2+5^2}$ = $\sqrt{144+25}$ = $\sqrt{169}$ = 13



Gambar 2.5

a. sinus $\alpha = \dfrac{5}{13}$ d. cosecan $\alpha = \dfrac{13}{5}$

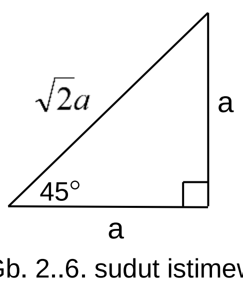
b. cosinus$\alpha = \dfrac{12}{13}$ e.secan $\alpha = \dfrac{13}{12}$

c. tangen $\alpha = \dfrac{5}{12}$ f. cotangen $\alpha = \dfrac{12}{5}$

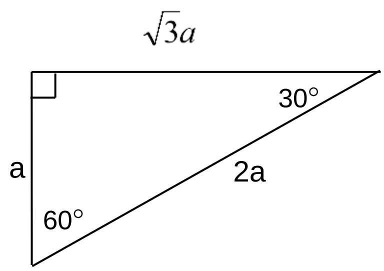
B. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Khusus (Istemewa)

Sudut istimewa adalah sudut yang perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator, yaitu: 0°, 30°, 45°,60°, dan 90°. Sudut-sudut istimewa yang akan dipelajari adalah 30°, 45°,dan 60°.

Untuk mencari nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa digunakan segitiga siku-siku seperti gambar berikut ini.



Gb. 2..6. sudut istimewa



Gb. 2.7 sudut istimewa

Dari gambar 2.6 dapat ditentukan dengan cara melihat segitiga siku-siku sama kaki dengan kedua kaki segitiga adalah sama misal a cm dan kedua sudut kakinya sama yaitu 45^0

$$\sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Dari gambar 2.7 dapat ditentukan dengan melihat awalnya diberikan segitiga sama sisi, dimana segitiga sama sisi pasti ketiga sudutnya sama yaitu 600 dan ketiga sisinya sama besar yaitu 2a cm. Segitiga sama sisi itu di bagi menjadi 2 bagian yang sama besar sehingga membentuk 2 buah segitiga siku-siku yang sama dengan sudutnya yaitu 90^0, 30^0 dan 60^0

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \cos 60° = \frac{1a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \tan 60° = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\csc 30° = \frac{2a}{a} = 2 \qquad \csc 60° = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad \sec 60° = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cot 30° = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Nah itu dia asal-usul sudut istemewa terbentuk, jadi nanti kalau teman-teman ditanyai adiknya bisa menjelaskan mengapa nilai sin 30 bisa hasilnya 0,5 heheheh**,....perlu diingat teman-teman ketika membuktikan suatu rumus** gunakan simbol yaa jangan mengunakan langsung bilangan karena akan bernilai secara khusus saja, jika menggunkan simbol misal tadi ibu contohkan panjangnya a cm disini teman teman bisa mengganti dengan simbol yang lain, jika diganti dengan bilangan berapapun maka hasil yang didapat dari sudut istimewa akan tetap sama saja, jika teman-teman penasaran coba diganti dengan bilangan berapapun akan tetap sama .....ok, jadi ketika teman-teman menggunakan simbol maka akan berlaku secara luas

OK, teman-teman ini rangkuman sudut istemewa trigonometri, ibu buatkan tabelnya agar mudah dihafalkan, sehingga ketika teman-teman mengerjakan soal akan cepat menyelesaiakan karena sudah hafal semua sudut istimewa, tidak banyak kok teman, SELAMAT MENGHAFAL ya....

TABEL 2.1 TRIGONOMETRI SUDUT ISTIMEWA

$\propto$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin $\propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos $\propto$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan $\propto$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

CONTOH:

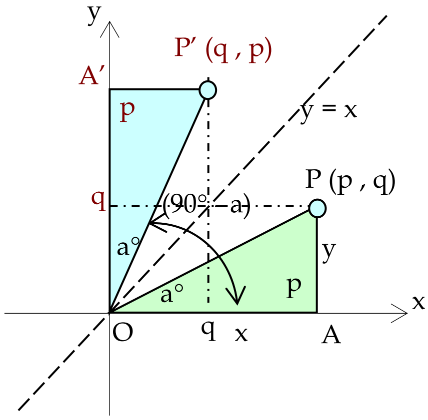
1. $\sin 30° + \cos 45° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin 45° \tan 60° + \cos 45° \cot 60° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6} = \frac{4}{6}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

C. Perbandingan Trigonometri Di Semua Kuadran

1. Sudut di Kuadran I ($0^\circ \le x \le 90^\circ$)



Gambar 2.8

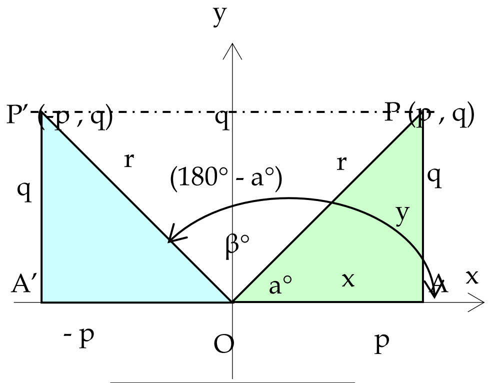
$\sin a^\circ = \frac{y}{r} = \frac{q}{r}$ (positif) $\qquad \operatorname{cosec} a^\circ = \frac{r}{y} = \frac{r}{q}$ (positif)

$\cos a^\circ = \frac{x}{r} = \frac{p}{r}$ (positif) $\qquad \sec a^\circ = \frac{r}{x} = \frac{r}{p}$ (positif)

$tg a^\circ = \frac{y}{x} = \frac{q}{p}$ (positif) $\qquad \cot g a^\circ = \frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ (positif)

2. Sudut di Kuadran II ($90^\circ < x \le 180^\circ$)

Perhatikan Δ OAP di kuadran I dan titik P (p , q).



$\sin a^\circ = \frac{y}{r} = \frac{q}{r}$

$\cos a^\circ = \frac{x}{r} = \frac{p}{r}$

$tg\ a^\circ = \frac{y}{x} = \frac{q}{p}$

Gambar 2.9

Bila Δ OAP dimana titik P(p , q) berada, dicerminkan terhadap sumbu y maka akan diperoleh P'(-p , q) di kuadran II.

Sehingga sudut antara OP’ dengan sumbu x positif adalah (180° - a°) dan x = q, y = -p, OP’ = OP = r, maka :

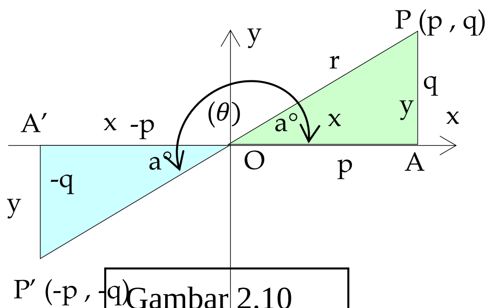
$$\sin\beta^\circ = \frac{y}{r} = \frac{q}{r} \text{ (positif)}, \quad \operatorname{cosec}\beta^\circ = \frac{r}{y} = \frac{r}{q} \text{ (positif)}$$

$$\cos\beta^\circ = \frac{-x}{r} = \frac{-p}{r} \text{ (negatif)}, \quad \sec\beta^\circ = \frac{r}{-x} = \frac{r}{-p} \text{ (negatif)}$$

$$tg\beta^\circ = \frac{y}{-x} = \frac{q}{-p} \text{ (negatif)}, \quad \operatorname{cotg}\beta^\circ = \frac{-x}{y} = \frac{-p}{q} \text{ (negatif)}$$

3. Sudut di Kuadran III ($180^\circ < x \leq 270^\circ$)

Perhatikan Δ OAP di kuadran I dan titik P (p , q).



Gambar 2.10

$$\sin a^\circ = \frac{y}{r} = \frac{q}{r}$$

$$\cos a^\circ = \frac{x}{r} = \frac{p}{r}$$

$$tg\, a^\circ = \frac{y}{x} = \frac{q}{p}$$

Bila Δ OAP dicerminkan terhadap titik pangkal O atau diputar 180° maka diperoleh P’ (-q , -p) di kuadran III, sehingga sudut antara OP’ dan sumbu x positif adalah (180° + a°) dan x = - p, y = - q serta OP’ = OP = r.

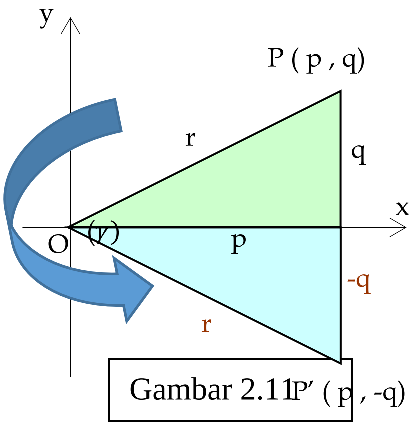
$$\sin\theta^\circ = \frac{-y}{r} = \frac{-q}{r} \text{ (negatif)} \qquad \operatorname{cosec}\theta^\circ = \frac{r}{-y} = \frac{r}{-q} \text{ (negatif)}$$

$$\cos\theta^\circ = \frac{-x}{r} = \frac{-p}{r} \text{ (negatif)} \qquad \sec\theta^\circ = \frac{r}{-x} = \frac{r}{-p} \text{ (negatif)}$$

$$tg\theta^\circ = \frac{-y}{-x} = \frac{-q}{-p} = \frac{q}{p} \text{ (positif)}, \quad \operatorname{cotg}\theta^\circ = \frac{-x}{-y} = \frac{-p}{-q} = \frac{p}{q} \text{ (positif)}$$

4. Sudut di Kuadran IV ($270^\circ < x \leq 360^\circ$)

Perhatikan Δ OAP danP(p,q) di kuadran I.



Gambar 2.11

$$\sin a^\circ = \frac{y}{r} = \frac{q}{r}$$

$$\cos a^\circ = \frac{x}{r} = \frac{p}{r}$$

$$\text{tg } a^\circ = \frac{y}{x} = \frac{q}{p}$$

Bila Δ OAP dicerminkan terhadap sb. X, maka diperoleh P' (p , -q) di kuadran IV, sehingga sudut antara OP' dan sumbu x positif adalah (360° - a°) atau (-a°) dan x = p, y = - q serta OP' = OP = r.

Maka :

$\sin \gamma^\circ = \frac{-y}{r} = \frac{-q}{r}$ (negatif)

$\cos \gamma^\circ = \frac{x}{r} = \frac{p}{r}$ (positif)

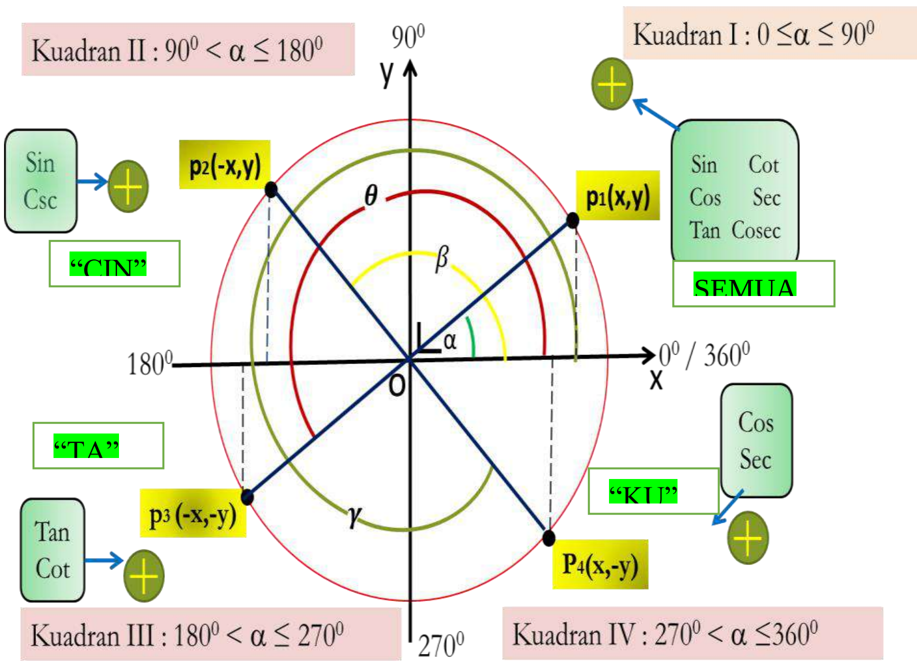
$tg\gamma^\circ = \frac{y-}{x} = \frac{-q}{p}$ (negatif)

$\cos ec\ \gamma^\circ = \frac{r}{-y} = \frac{r}{-q}$ (negatif)

$\sec \gamma^\circ = \frac{r}{x} = \frac{r}{p}$ (positi

$\cot g\ \gamma^\circ = \frac{x}{-y} = \frac{p}{-q}$ (negatif)

KESIMPULAN

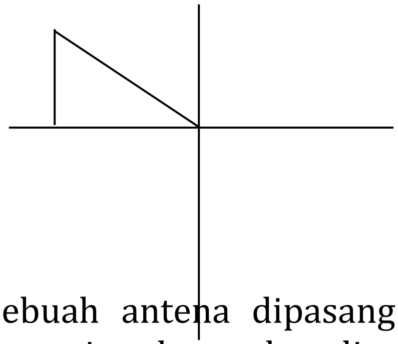


Gambar 2.12

DARI SINI muncullah kata "**SEMUA CINTAKU**", Hal ini hanya untuk mempermudah teman-teman menghafalkan nilai positif trigonometri di semua kuadran, keren kan singkatannya heheheh...jadi makna "SEMUA" artinya nilai perbandingan di kuadran I bernilai positif semua, kata "CIN" itu hanya untuk mengingat saja maksudnya Sin , jadi yang bernilai positif di kuadran II hanya sin dan kebalikan sin yaitu cosec, kata "TA" itu maksudnya tan , dikuadaran III yang bernilai positif hanya tan dan cotan, kata "KU" maksudnya cos , dikuadran IV hanya cos dan sec yang bernilai positif. Sampai sini mudah kan teman-teman. Jadi belajar TRIGONOMETRI itu menyenangkan dan mudah untuk dipahai bukan.

CONTOH

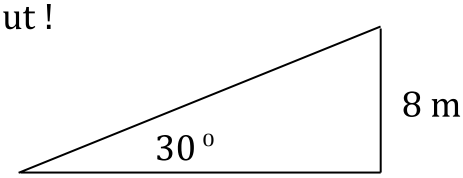
1. Diketahui ▲ABC dan cos α = -15/17 (α di kuadran II). Tentukan nilai sin α dan tg α
   cos α = -15/17 (kuadran II)



$$x = \sqrt{17^2 - 15^2}$$
$$= \sqrt{289^2 - 225^2}$$
$$= \sqrt{64}$$
$$= 8$$

sin α = x/17 = 8/17
tg α = -15/x = -15/8

2. Sebuah antena dipasang dengan penguat dari kawat seperti pada gambar di samping. Jika tinggi antena 8 m dan sudut elevasi 30^0, berapakah panjang kawat tersebut !



Menentukan panjang kawat

$$\sin 30 = \frac{8}{panjangkawat}$$

$$½ = \frac{8}{panjangkawat}$$

$$\text{panjang kawat} = \frac{8}{\frac{1}{2}}$$

panjang kawat = 16 m

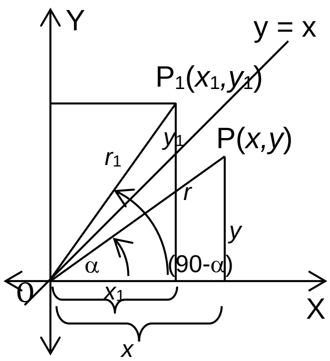
3. Diketahui Sin $\alpha = \frac{3}{5}$, α dikuadran II (sudut tumpul). Tentukan nilai $Sec\alpha, Csc\alpha, Cotg\alpha$
   Jawab : Sin $\alpha = \frac{3}{5}$, y = 3, r = 5, x = $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
   Karena dikuadran II, nilai x = -4

Sehingga : Sec $\alpha = \frac{5}{-4}$, Csc $\alpha = \frac{5}{3}$, Cotg $\alpha = \frac{-4}{3}$

D. Rumus Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut-Sudut Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut (90° ± α), (180° ± α), (360° ± α), dan -α°. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut α° dengan (90° - α) dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut α° dengan (180° - α). Contoh: penyiku sudut 50° adalah 40°, pelurus sudut 110° adalah 70°.

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90° - α)



Gb. 2.13. sudut yang berelasi

Dari gambar 2.7 diketahui Titik P_1 (x_1,y_1) bayangan dari P(x,y) akibat pencerminan garis $y = x$, sehingga diperoleh:

a. ∠XOP = α dan ∠XOP$_1$ = 90° - α
b. $x_1 = x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh:

a. $\sin(90° - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$

b. $\cos(90° - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

c. $\tan(90° - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot\alpha$

Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90° - α) dapat dituliskan sebagai berikut:

a. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	d. $\csc(90° - \alpha) = \sec\alpha$
b. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	e. $\sec(90° - \alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha$
c. $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$	f. $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

Contoh :

sin 30° = sin (90° - 60°) $\rightarrow$ cos 60°

cos 45° = cos (90° - 45°) $\rightarrow$ sin 45°

tg 30° = tg (90° - 60°) $\rightarrow$ ctg 60°

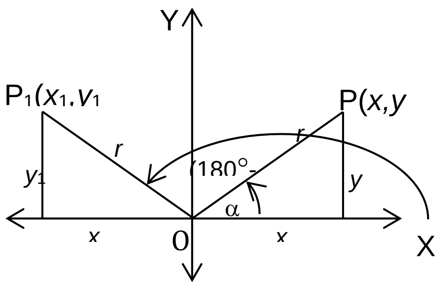
2. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° - α)

Titik $P_1(x_1, y_1)$ adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° - \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:



Gb. 2.14. sudut yang berelasi

a. $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

b. $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180° - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{-x} = -\tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	d. $\csc(180° - \alpha) = \csc\alpha$
b. $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	e. $\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha$
c. $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$

Contoh :

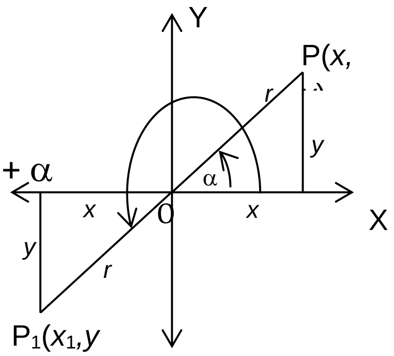
sin 150° = sin (180° - 30°) = sin 30° → maka sin 150° = ½
cos 120° = cos (180° - 60°) = - cos 60° → maka cos 120 = - ½
tg 135° = tg (180° - 45°) = - tg 45° → maka tg 135° = - 1

3. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° + α)

Dari gambar 2.9 titik $P_1(x_1,y_1)$ adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap garis $y = -x$, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° + \alpha$
b. $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:



Gb. 2.15. sudut yang berelasi

a. $\sin(180° + \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(180° + \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180° + \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{-y}{-x} = \dfrac{y}{x} = \tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(180° + \alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	e. $\sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha$
c. $\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$	f. $\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha$

Contoh :

sin 225° = sin (180° + 45°) = - sin 45°= - ½ √ 2
cos 240° = cos (180° + 60°)= - cos 60°= - ½
tg 210° = tg (180° + 30°)= tg 30° = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

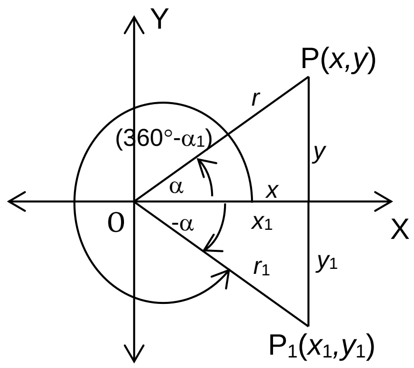
4. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)

Dari gambar 2.10 diketahui titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu x, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = -\alpha$

b. $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan



Gb. 2.16 sudut yang berelasi

a. $\sin(-\alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(-\alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

c. $\tan(-\alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{-y}{x} = -\tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	e. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Untuk relasi α dengan (- α) tersebut identik dengan relasi α dengan 360° – α, misalnya sin (360° – α) = – sin α.

Contoh :

1. sin 300° = sin (360° - 30°) = sin (- 30°)→ - sin 30° = - ½
2. cos 315° = cos (360°- 45°)= cos (- 45°)→ cos 45° = ½ √ 2
3. tg (- 30°) = - tg 30° = - $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

OK, teman-teman ibu rangkuman sudut relasi di berbagai kuadran, perlu diingat dan dipahami **hati-hati jika menggunakan relasi sudut 90 dan 270**, karena relasi sudutnya berubah, sudah dibahas seblumnya mengapa bisa berubah, jadi jika menggunkan relasi sudut 90 dan 270 sin menjadi cos, cos menjadi sin, Tan menjadi cotan. **INI yang sering teman-teman lupakan yaitu mengganti nilai relasi dan positif negatif bergntung pada kuadran**. Paling aman memang menggunakan relasi sudut 180 dan 360 karena relasi trigonometrinya tetap sama.

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di semua kuadran

a. Rumus di kuadran I

$$Sin(90-\alpha)=\cos\alpha$$
$$Cos(90-\alpha)=\sin\alpha$$
$$Tan(90-\alpha)=Cotg\alpha$$

b. Rumus di kuadran II

$$Sin(90+\alpha)=Cos\alpha$$
$$Cos(90+\alpha)=-Sin\alpha$$
$$Tan(90+\alpha)=-Cotg\alpha$$

atau

$$Sin(180-\alpha)=Sin\alpha$$
$$Cos(180-\alpha)=-Cos\alpha$$
$$Tan(180-\alpha)=-Tan\alpha$$

c. Rumus di kuadran III

$$Sin(270-\alpha)=-Cos\alpha$$
$$Cos(270-\alpha)=-Sin\alpha$$
$$Tan(270-\alpha)=Cotg\alpha$$

atau

$$Sin(180+\alpha)=-Sin\alpha$$
$$Cos(180+\alpha)=-Cos\alpha$$
$$Tan(180+\alpha)=Tan\alpha$$

d. Rumus di kuadran IV

$$Sin(270+\alpha)=-Cos\alpha$$
$$Cos(270+\alpha)=Sin\alpha$$
$$Tan(270+\alpha)=-Cotg\alpha$$

atau

$$Sin(360-\alpha)=-Sin\alpha$$
$$Cos(360-\alpha)=Cos\alpha$$
$$Tan(360-\alpha)=-Tan\alpha$$

e. Rumus sudut negatif

$$Sin(-\alpha)=-Sin\alpha$$
$$Cos(-\alpha)=Cos\alpha$$
$$Tan(-\alpha)=-Tan\alpha$$

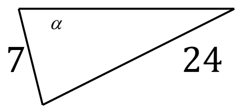
f. Rumus sudut lebih dari 360^0

$$Sin(k.360+\alpha)=Sin\alpha$$
$$Cos(k.360+\alpha)=Cos\alpha$$
$$Tan(k.360+\alpha)=Tan\alpha$$

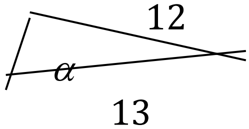
Contoh Soal

1. Tentukan nilai dari sin α, cos α, dan tangen α pada masing-masing segitiga berikut!

a.



b.



2. a. . AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ sin α = $\frac{BC}{AC} = \frac{24}{25}$

= $\sqrt{7^2 + 24^2}$ cos α = $\frac{AB}{AC} = \frac{7}{25}$

= $\sqrt{49 + 576}$ tg α = $\frac{BC}{AB} = \frac{24}{7}$

= $\sqrt{625}$

= 25

b. AB = $\sqrt{AC^2 - BC^2}$

= $\sqrt{13^2 - 12^2}$ sin α = $\frac{BC}{AC}$ = 12/13

= $\sqrt{169^2 - 144^2}$ cos α = $\frac{AB}{AC}$ = 5/13

= $\sqrt{25}$ tg α = $\frac{BC}{AB}$ = 12/5

= 5

3. Tentukan nilai dari :

a. sin 120 ^{0} b. cos 210 ^{0} c. tg 300 ^{0}

Jawab:

a. sin 120 = sin (180 – 60)

= sin 60

= ½ $\sqrt{3}$

b. cos 210 = cos (180 + 30)

= - cos 30

= - ½ $\sqrt{3}$

c. tg 300 = tg (360 – 60)

= - tg 60 = - $\sqrt{3}$

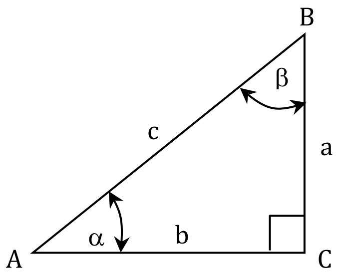
E. IDENTITAS TRIGONOMETRI

APA sih Identitas itu, ya sama halnya seperti teman-teman identitas kan bisa diartikan pengenal, jadi identitas trigonometri itu teman-teman akan mempelajari bentuk lain dari trigonometri, walaupun terlihat seperti bentuk yang berbeda namun nilainya tetap sama lhoo, ibaratnya begini uang Rp 1000,00 sama nilainya dengan uang Rp 500,00 dua keping..kan bentuknya beda tapi nilainya uangnya tetap sama, begitu pula dengan identitas trigonometri juga semudah itu kok teman-teman.....yukkk mulaiii membaca lagii yaa......semangatttt...

Suatu persamaan yang dipenuhi oleh semua variabelnya disebut identitas/kesamaan. Biasanya bentuk identitas diminta membuktikkan bentuk yang satu dengan bentuk yang lain, atau membuktikkan luar kiri sama dengan luar kanan.

Identitas trigonometri dapat ditunjukkan kebenarannya dengan beberapa cara, diantaranya adalah:

1) Mengubah salah satu bentuk rumus (biasanya dipilih yang bentuknya agar rumit) sehingga diperoleh bentuk sama dengan rumus yang lain.
2) Mengubah masing-masing ruas sehingga diperoleh bentuk yang sama



Menurut definisi :

Sin α = $\frac{a}{c}$ Ctan α = $\frac{b}{a}$

Cos α = $\frac{b}{c}$ Sec α = $\frac{c}{b}$

Tan α = $\frac{a}{b}$ Cosec = $\frac{c}{a}$

1. $\text{Sin}^2\,\alpha + \text{Cos}^2\,\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$

$$= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

2. tan α = $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}} = \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}$

3. ctan α= $\frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{Cos\alpha}{Sin\alpha}$ = $\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{Cos\alpha}{Sin\alpha}$

4. tan² α + 1 = $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1$ = $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$ = $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$ = $\frac{c^2}{b^2}$ = Sec² α

5. Ctan² α + 1 = $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1$

= $\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}$ = $\frac{b^2 + a^2}{a^2}$ = $\frac{c^2}{a^2}$ = Cosec² α

6. Sec α = $\frac{c}{b}$ = $\frac{1}{\frac{b}{c}}$ = $\frac{1}{Cos\alpha}$

7. Cosec α = $\frac{c}{a}$ = $\frac{1}{\frac{a}{c}}$ = $\frac{1}{Sin\alpha}$

8. Ctan α = $\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$ = $\frac{1}{\tan\alpha}$

RANGKUMAN IDENTITAS TRIGONOMETRI

Sin² α + Cos² α = 1 Sec α = $\frac{1}{Cos\alpha}$

tan α $= \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}$ Cosec α = $\frac{1}{Sin\alpha}$

Cotan α $= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ Ctan α = $\frac{1}{\tan\alpha}$

tan² α + 1 = Sec² α, Ctan² α + 1 = Cosec² α

Rangkuman identitas ini merupakan identitas dasar yang teman-teman harus ingat, kenapa perlu di ingat, ya supaya klo dikasih soal bisa tau langsung mau diubah kemana yang sesuai dengan identitasnya too...jadi dengan mudah nanti teman-teman bisa mengubah ke bentuk yang berbeda namu tetap diingat nialinya pasti sama kok. OK yook lanjut membaca dan memahami contoh soal setelah itu jangan lupa latihan soal yaa.....

LATIHAN SOAL

1. Buktikan : Sec A – Cos A = tan A . Sin A

   Bukti :

   $$\text{Sec A} - \text{Cos A} = \frac{1}{\text{CosA}} - \text{CosA}$$
   $$= \frac{1 - \text{Cos}^2\text{A}}{\text{CosA}}$$
   $$= \frac{\text{Sin}^2\text{A}}{\text{CosA}}$$
   $$= \frac{\text{SinA}}{\text{CosA}} - \text{SinA}$$
   = tan A . Sin A (terbukti)

2. Buktikan : $\text{Sec}^2x\ (1 - \sin^4 x) - 2\ \text{Sin}^2 x = \text{Cos}^2 x$

   Bukti :

   $$\text{Sec}^2x\ (1 - \sin^4x) - 2\ \text{Sin}^2x = \frac{1}{\text{Cos}^2x}(1 - \sin^2x)\ (1 + \sin^2x) - 2\ \text{Sin}^2x$$
   $$= \frac{1}{\text{Cos}^2x}.\text{Cos}^2x\ (1 + \sin^2x) - 2\ \text{Sin}^2x$$
   $$= 1 + \text{Sin}^2x - 2\ \text{Sin}^2x$$
   $$= 1 - \text{Sin}^2x$$
   $= \text{Cos}^2x$ (terbukti)

3. Buktikan: $\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^{2x}} = \cos 2x$

   $$\frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^{2x}} = \cos 2x$$

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^{2x}}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\frac{\cos\ 2x}{1}$$

= cos 2x (terbukti)

4. Buktikan identitas berikut:
   a. Sin α . Cos α . Tan α = (1 – Cos α) (1 + Cos α)
   Jawab:
   Ruas kiri = Sin α . Cos α . Tan α
   = Sin α . Cos α . $\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}$
   = Sin^2 α
   = 1 – Cos^2 α
   = (1 – Cos α) (1 + Cos α) = Ruas Kanan Terbukti!
   b. Sin β . Tan β + Cos β = Sec β
   Jawab:
   Ruas Kiri = Sin β . Tan β + Cos β
   = Sin β . $\frac{Sin\beta}{Cos\beta}$ + Cos β
   = $\frac{Sin^2\beta}{Cos\beta}+\frac{Cos^2\beta}{Cos\beta}$
   = $\frac{1}{Cos\beta}=$ Sec β = Ruas Kanan Terbukti

5. Diketahui Tan A° = - $\frac{5}{12}$ dan 27° ≤ A ≤ 360
   Hitunglah : a) Sec A° dan b) Sin A°

Jawab :

a. Dengan menggunakan rumus

$1 + Tan^2\ A^o = Sec^2\ A^o$

$\Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = Sec^2 A°$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{25}{144} = Sec^2 A°$

$\Leftrightarrow \frac{169}{144} = Sec^2\ A°$

$\Leftrightarrow$ Sec A^o = - $\frac{13}{12}$ $atau\ Sec\ A° = \frac{13}{12}$

$\Leftrightarrow$ Cos A^o = $\frac{12}{13}$ karena di kuadran IV

b. Dengan menggunakan rumus

Tan A^o = $\frac{Sin\ A°}{Cos\ A°}$

$\Leftrightarrow$ Sin A^o = Tan A^o . Cos A^o

$\Leftrightarrow$ Sin A^o = - $\frac{5}{12}\ x\ \frac{12}{13}$

$\Leftrightarrow$ Sin A^o = - $\frac{5}{13}$

6. Buktikan bahwa yang berikut ini merupakan identitas tgrigonometri $Sec^2\ \alpha$ - $Sin^2\ \alpha$ = 1

Jawab

Kita ubah ruas kiri $Sec^2\ \alpha$ - $Sin^2\ \alpha$. $Sec^2\ \alpha$ = $Sec^2\ \alpha$ (1 - $Sin^2\ \alpha$)

= $Sec^2\ \alpha$. $Cos^2\ \alpha$

= $\frac{1}{Cos^2\alpha} . Cos\ \alpha$

= 1

Ruas kiri = rumus kanan

Jadi terbukti bahwa $Sec^2\ \alpha$ - $Sin^2\ \alpha$. $Sec^2\ \alpha$ = 1

7. Buktikan $3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$

Jawab

Kita ubah ruas kiri

$3 + 5 \sin^2 \alpha = 3 + 5 (1 - \cos^2 \alpha)$

$= 3 + 5 - 5 \cos^2 \alpha$

$= 8 - 5 \cos^2 \alpha$

Rumus kiri = ruas kanan

Jadi terbukti bahwa $3 + 5 - 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$

Latihan :

1. Diketahui $\cos^2 \alpha = -\frac{1}{7}$ $dan\ 90 \angle \alpha \angle 180$

   Hitunglah $\sin^2 \alpha$ dan $\tan^2 \alpha$

   Jawab

2. Diketahui Cosec $\alpha^o = -\frac{5}{3}$ $dan\ 180 \leq \alpha \leq 270$

   Hitunglah Sin α^o , Cos α^o dan Tan α^o

   Jawab

3. Buktikan tiap bentuk persamaan berikut merupakan identitas trigonometri.

   a) $1/3 \sin^2 \alpha + 1/3 \cos^2 \alpha = 1/3$

   b) $\tan \alpha - \cos \alpha = \frac{1-2\ Cos\ \alpha}{Sin\alpha Cos\alpha}$

   c) $5 + 4 \tan^2 \alpha = 1 + 4 \sec^2 \alpha$

   d) $\frac{Tan\alpha}{1-Tan^2\alpha} = \frac{Sin\alpha Cos\alpha}{Cos^2\alpha - Sin^2\alpha}$

   e) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

   f) $\tan \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{Cos\alpha}$

   g) $(1 - \sin^2 \alpha) (1 + \tan^2 \alpha) = 1$

   h) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

3
KOORDINAT KUTUB (KOORDINAT POLAR)

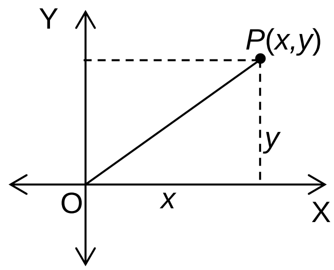
****

Masih semangat teman-teman semuanya, tetap happy ya.... yook ga boleh loyo, sekarang masuk pada pembahasan menggambar suatu titik. Teman-teman biasanya menggambar dengan menggunakan koordinat kartesius dimana ada sumbu x dan sumbu y, titik pada nilai x dan y yang di inginkan kemudian menarik garis dari titi (0,0) ke titik (x,y) jadi deh gambarnya, namun menggambar kedudukan suatu titik juga dapat menggunakan sudut dan panjang dari jari-jari yang diketahui, cara seperti ini yang dinamakan koordinat polar, ok penasaran kan apa itu koordinat polar bagaimana penerapannya yuk teman-teman lanjut membaca lagi...

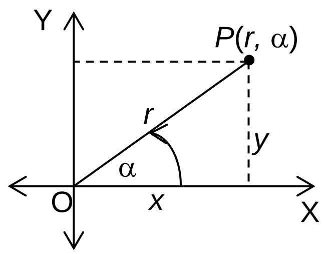
Menentukan Koordinat kartesius dan Koordinat Kutub

Letak suatu titik pada sebuah bidang dapat dinyatakan dengan 2 macam sistem koordinat, yaitu :

a. Sistem koordinat kartesius, yaitu dengan absis (x) dan ordinat (y).
b. Sistem koorsdinat kutub, yaitu dengan jarak (r) dan sudut yang dibentuk dengan sumbu x positif (θ°).



Gb. 3.1 koordinat kartesius



Gb. 3.2koordinat kutub

Pada gambar 3.1 titik $P(x,y)$ pada koordinat kartesius dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan $P(r, \alpha)$ seperti pada gambar 3.2

Jika koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ diketahui, koordinat kartesius dapat dicari dengan hubungan:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\alpha$$

jika koordinat kartesius titik $P(x,y)$ diketahui, koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ dapat dicari dengan hubungan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \alpha$ = arc tan $\frac{y}{x}$, arc tan adalah invers dari tan

P(r, α^0) = P(x,y), dengan
x = r cos α
y = r sin α

Catatan: untuk menentukan α, perhatikan letak kuadran dari titik tersebut.

<u>CONTOH SOAL</u> :

1. Ubahlah koordinat Kartesius berikut kedalam koordinat kutub.
   a. P ($\sqrt{3}$, 1) b. Q (- 3, 4)

Penyelesaian:

a. P ($\sqrt{3}$, 1)

x = $\sqrt{3}$, y = 1 (**kuadarn I**)

r = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1}$ = 2

α = arc tan $\frac{y}{x}$

= arc tan $\frac{1}{\sqrt{3}}$

= 30^0

Jadi, koordinat kutubnya P(2, 30^0)

b. Q (- 3, 4)

x = - 3, y = 4 (**kuadran II**)

r = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{9+16}$ = 5

α = arc tan $\frac{y}{x}$

= arc tan $\frac{4}{-3}$

= - $53{,}1^0$

Jadi, koordinat kutubnya P(5; $53{,}1^0$)

2. Diketahui koordinat kutub titk P (4, 60°). Tentukan koordinat kartesius titik tersebut !

Penyelesaian : P (4, 60°) $\rightarrow$ r = 4 dan θ° = 60°

$x = r \cdot \cos \theta°$ $\quad y = r \cdot \sin \theta°$

$x = 4 \cdot \cos 60°$ $\quad y = 4 \cdot \sin 60°$

$x = 4 \cdot \frac{1}{2}$ $\quad y = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = 2$ $\quad y = 2\sqrt{3}$

Jadi koordinat kartesius dari titik P (4 , 60°) adalah : P (2 , 2√3)

3. Diketahui koordinat kartesius titik P (-2, -2√3). Tentukan koordinat kutub titik P tersebut!

Penyelesaian:

P (-2, -2√3). $\rightarrow$ x = -2 dan y = -2√3 **(di kuadran III)**

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}$ $\quad$ $\text{tg } \theta° = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2}$

$r = \sqrt{4+12}$ $\quad$ $\text{tg } \theta° = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{16}$ $\quad$ $\theta° = \text{arc. tg } \sqrt{3}$

$r = 4$ $\quad$ $\theta° = 240°$ **(kuadran III)**

Jadi koordinat kutub dari titik P (-2,-2√3) adalah : P (4 , 240°)

4. Nyatakan koordinat kutub titik-titik berikut ke koordinat kartesius !

a. A(6, 30 ^{0}) c. C(6, 315 ^{0})

b. B(2,120 ^{0}) d. D($4\sqrt{3}$,30 ^{0})

Jawab:

a. A(6, 30 ^{0})

$x = r \cos \alpha$ $\quad y = r \sin \alpha$

$= 6 \cos 30^0$ $\quad = 6 \sin 30^0$

$= 6. \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad = 6. \frac{1}{2}$

$= 3\sqrt{3}$ $\quad = 3$

Jadi koordinat kartesiusnya A($3\sqrt{3}$,3)

b. B(2,120 ^{0})

$x = r \cos \alpha$ $\quad y = r \sin \alpha$

$= 2 \cos 120^0$ $\quad = 2 \sin 120^0$

$= 2. (-\frac{1}{2})$ $\quad = 2. \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= -1$ $\quad\quad$ $= \sqrt{3}$

Jadi koordinat kartesiusnya B(-1, $\sqrt{3}$)

c. C(6, 315^0)

$x = r \cos \alpha$ $\quad\quad$ $y = r \sin \alpha$

$= 6 \cos 315^0$ $\quad\quad$ $= 6 \sin 315^0$

$= 6.\ ½\ \sqrt{2}$ $\quad\quad$ $= 6.\ (-½\sqrt{2})$

$= 3\sqrt{2}$ $\quad\quad$ $= -3\sqrt{2}$

Jadi koordinat kartesiusnya C(3$\sqrt{2}$,-3$\sqrt{2}$)

d. D (4$\sqrt{3}$,300^0)

$x = r \cos \alpha$ $\quad\quad$ $y = r \sin \alpha$

$= 4\sqrt{3} \cos 300^0$ $\quad\quad$ $= 4\sqrt{3} \sin 300^0$

$= 4\sqrt{3}.\ ½$ $\quad\quad$ $= 4\sqrt{3}.\ (-½\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $= -6$

Jadi koordinat kartesiusnya C (2$\sqrt{3}$,-6)

5. Nyatakan koordinat Kartesius berikut ke koordinat kutub!

a. P(2,2$\sqrt{3}$) $\quad\quad$ c. R(-2$\sqrt{3}$,6)

b. Q(-1,-1) $\quad\quad$ d. S(6,-2$\sqrt{3}$)

Jawab

a. . P(2,2$\sqrt{3}$)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad\quad$ $tg\ \alpha = y/x$

$= \sqrt{2^2 + 2\sqrt{3}^2}$ $\quad\quad$ $= \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{4+12}$ $\quad\quad$ $= \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60^0$

$= \sqrt{16} = 4$

Jadi Koordinat P(4,60^0)

b. Q(-1,-1)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad\quad$ $tg\ \alpha = y/x$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$ $\quad\quad$ $= \dfrac{-1}{-1}$

$= \sqrt{1+1}$ $\quad\quad$ $= 1 \rightarrow \alpha = 45^0$

$= \sqrt{2}$

Jadi Koordinat P($\sqrt{2}$,45^0)

c. R(-2 $\sqrt{3}$,6)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tg α = y/x

$= \sqrt{(-2\sqrt{3}^2) + 6^2}$ $= \dfrac{6}{-2\sqrt{3}}$

$= \sqrt{12+36}$ $= -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^0$

$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Jadi Koordinat P($4\sqrt{3}$,120^0)

d. S(6,-2 $\sqrt{3}$)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tg α = y/x

$= \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2}$ $= \dfrac{-2\sqrt{3}}{6}$

$= \sqrt{36+12}$ $= -1/3\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 330^0$

$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Jadi Koordinat P($4\sqrt{3}$,330^0)

6. Ubahlah koordinat kutub berikut ke dalam koordinat Kartesius.

a. A (10, 60^0)   b. B (5$\sqrt{2}$, 45^0)

Penyelesaian:

a. A (10, 60^0), r = 10, α = 60^0

$x = r\cos\alpha = 10\cos 60^0 = 10\ (\frac{1}{2}) = 5$

$y = r\sin\alpha = 10\sin 60^0 = 10\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 5\sqrt{3}$

Jadi, koordinat Kartesiusnya adalah A (5, 5$\sqrt{3}$)

b. B (5$\sqrt{2}$, 45^0), r = 5$\sqrt{2}$, α = 45^0

$x = r\cos\alpha = 5\sqrt{2}\cos 45^0 = 5\sqrt{2}\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 5$

$y = r\sin\alpha = 5\sqrt{2}\sin 45^0 = 5\sqrt{2}\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 5$

Jadi, koordinat Kartesiusnya adalah B (5, 5)

7. Ubahlah menjadi koordinat kutub

   a. $B(5,5)$ b. $C(-4,4\sqrt{3})$

   Jawab

   a. $B\ (5,5)$ b. $C(-4,4\sqrt{3})$

   $x = 5, y = 5$ (kuadran I) $x = -4, y = 4\sqrt{3}$ (kuadran II)

   $r = \sqrt{5^2 + 5^2}$ $r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}$

   $= \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$ $= \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

   $\tan\alpha = \dfrac{5}{5} = 1 \rightarrow \alpha = 45°$ $\tan\alpha = \dfrac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

   jadi $B\ (5\sqrt{2}, 45°)$ jadi $C\ (8,\ 120°)$

8. Ubahlah $P\ (12,60°)$ menjadi koordinat kartesius

   <u>Jawab</u>

   $P\ (12,60°)$ diubah ke koordinat kartesius

   $x = r\cos\alpha$ $y = r\sin\alpha$

   $= 12\cos 60°$ $= 12\sin 60°$

   $= 12(1/2)$ $= 12\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

   $x = 6$ $y = 6\sqrt{3}$

   Jadi koordinat kartesiusnya $P(6,6\sqrt{3})$

4

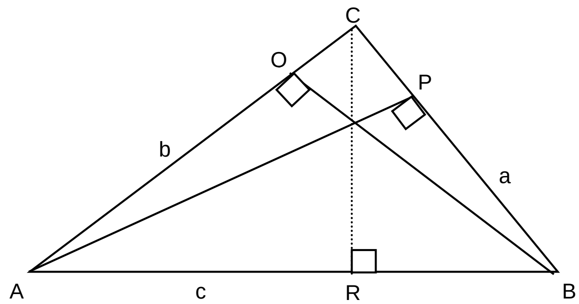
DALIL-DALIL DALAM SEGITIGA

****

Haloow teman-teman semkin jauh mempelajari trigonometri akan semkin menyengkan, kali ini teman teman akan mempelajari bagaimana jika ada salah satu sudut yang tidak diketahui atau ada sisi yang tidak diketahui jika segitiganya berbentuk segitiga sebarang, nah makin seru kan, semua itu bisa mudah terselesaikan dengan menggunakan aturan sinus dan kosinus, ok teman-teman sudah makin penasaran ini kok bisa ya.......yook lanjut membaca dan memahaminya yaa.......

A. ATURAN SINUS

Perhatikan Δ ABC sembarang, berikut ini:



Pada Δ ACR Sin A = $\frac{CR}{b}$ ⇔ CR = b Sin A ....(1)

Pada Δ BCR Sin B = $\frac{CR}{a}$ ⇔ CR = a Sin B ...... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh b Sin A = a Sin B

$\Leftrightarrow \frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B}$

Pada Δ APC dab Δ APB didapat

$\Leftrightarrow \frac{a}{Sin\ A} = \frac{c}{Sin\ C}$

Kesimpulan : $\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$ **Disebut Aturan Sinus**

INGAT aturan sinus bisa digunakan ketika ada minimal satu pasanagn sudut dan sisi yang sehadap atau berhadapan ok, jika tidak ada sepasang sisi dan sudut yang sehadap maka aturan sinus tidak dapat digunakan, EITSSS ga ush bingung dulu jika aturan sinus tidak bisa digunakan maka dapat menggunkan aturan yang lain, santuy trigonometri masih memiliki banyak jurus teman-teman...yokkk sekarang teman-teman lanjut memca contoh soalnya dulu ya...

Contoh-contoh :

- Boleh pakai kalkulator

Jika diketahui $\angle$ B = 180° – (60° + 75°), sisi C = 12 cm

Tentukan unsur segitiga yang lain :

Jawab : $\angle$ B = 180° – (60° + 75°) = 45°

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{c}{Sin\ C} \Leftrightarrow \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$$

$$b = \frac{c\ Sin\ B}{Sin\ C}$$

$$b = 12.\ \frac{Sin\ 45^0}{Sin\ 75^0}$$

$$b = 12.\ \frac{0{,}7071}{0{,}9659}$$

b = 8,7848

b = 8,78 cm

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{c}{Sin\ C} \Leftrightarrow a = \frac{c\ Sin\ A}{Sin\ C}$$

$$a = \frac{12\ Sin\ 60^0}{Sin\ 75°}$$

a = 10,76 cm

- Pada segitiga ABC, b = 1, $\angle B = 30^0, \angle C = 53{,}1^0$. Hitunglah c.

  Jawab :

$$\frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} \Leftrightarrow c = \frac{bSinC}{SinB}$$

$$= \frac{12Sin53{,}1}{Sin30}$$

$$= \frac{12.0{,}8}{0{,}5}$$

$$= \frac{9{,}6}{0{,}5}$$

$$= 19{,}2$$

- Pada segitiga ABC diketahui sisi b = 65, sisi c = 46. $\angle B = 68{,}2$. Hitunglah $\angle C$

$$\frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} \Leftrightarrow \text{Sin C} = \frac{cSinB}{b} = \frac{46Sin68{,}2}{65}$$

$$= \frac{46x0{,}928}{65}$$

$$= \frac{42{,}710}{65}$$

$$= 0{,}657$$

$$\angle C = 41{,}1$$

- Pada Δ ABC , sudut B = 40 ^{0} , b = 10 cm dan sudut C = 50 ^{0} cm, tentukan unsur yang lain !

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{c}{\sin 50} = \frac{10}{\sin 40}$$

$$c = \frac{10.\sin 50}{\sin 40}$$

$$= \frac{10.0{,}7660}{0{,}6428}$$

$$= \frac{7{,}660}{0{,}6428}$$

$$= 11{,}92 \text{ cm}$$

Menentuka sudut A :

Sudut A = $180^0 - (\angle B^0 + \angle C^0)$

$= 180^0 - (40^0 + 50^0)$

$= 180^0 - 90^0$

$= 90^0$

Menentukan a:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 90} = \frac{10}{\sin 40}$$

$$a = \frac{10.\sin 90}{\sin 40}$$

$$= \frac{10.1}{0,6428}$$

$$= \frac{10}{0,6428}$$

$$= 15,56 \text{ cm}$$

Setelah memahami aturan sinus dan beberapa contoh soal yang diberikan yook sekarang waktunya menguji pemahaman teman-teman dengan mengerjakan latihan soalnya, jangan menyerah dan malas teman-teman, kalahkan rasa lemas pada diri teman-teman agar lebih jauh lagi pemahaman tenatng aturan sinus ini Ok..

Latihan

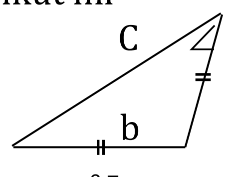
1. Tentukan aturan sinus yang berlaku pada Δ PQR

   Jawab

2. Hitung tanpa menggunakan kalkulator

   Unsur-unsur yang belum di ketahui pada segitiga-segitiga berikut ini

   a) C

   b ? a

   A 30° ? B

   $\angle$ C = ……..°

   $\angle$ B = …….°

   CB = a = cm

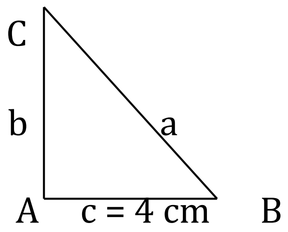
   AC = b = ……..

   Aturan sinus yang dipakai

Δ ABC samakaki, AB = BC $\qquad \dfrac{b}{Sin\ B} = \dfrac{a}{Sin\ A}$

b = ...

b)



$\angle$ B = 60^o

$\angle$ A = ...

$\angle$ C = ...

a = ...

b = ...

3. Diketahui Δ PQR dengan PR = 4 cm, $\angle$ ROQ = 60^o dan $\angle$ PQR = 50^o. Dengan bantuan kalkulator tentukan unsur-unsur segitiga yang belum diketahui.
   Jawab.

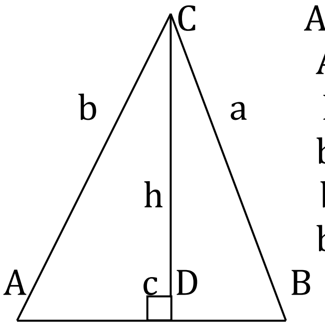
B. ATURAN KOSINUS

Bila pada sebuah segitiga unsur-unsur yang diketahui, tidak memuat pasangan sisi dan sudut yang sehadap, maka unsur segitiga yang lain tidak bisa dihitung dengan aturan sinus. Oleh karena itu perlu ada aturan yang baru. Aturan itu disebut Aturan Kosinus. Nah ini ni yang dikatakan jurus lain tadi ^^

Lihat gambar pada Δ DBC

$$\text{Sin B} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ Sin\ B$$

$$\text{Cos B} = \frac{DB}{a} \rightarrow DB = a\ Cos\ B$$



AD = AB – DB

AD = C – a Cos B

Lihat Δ ADC siku-siku di D

$b^2 = AD^2 + C\,D^2$

$b^2 = (C - a \text{ Cos B})^2 + 6 \text{ Sin B})^2$

$b^2 = C^2 - 2ac \text{ Cos B} + a^2 \text{ Cos}^2 \text{ B} + a^2 \text{ Sin}^2 \text{ B}$

$b^2 = C^2 - 2ac \text{ Cos B} + a^2 (\text{Cos}^2 \text{ B} + \text{Sin}^2 \text{ B})$

$\boxed{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \text{ Cos B}}$

Disebut Aturan Cosinus

Untuk menentukan sisi a dan sisi c berlaku rumus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Coa } A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } C$$

→ **BUKTIKAN BERSAMA TEMAN**

Dari aturan Kosinus di atas bisa diturunkan rumus untuk menghitung besarnya sudut.

$$\text{Cos } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{Cos } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{Cos } B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

Contoh-contoh

1. Pada Δ ABC berikut diketahui tiga buah unsur.
   Hitunglah sisi yang belum diketahui (teliti sampai 2 tempat desimal)
   a) $a = 5$, $b = 7$ dan $\angle C = 68^o$
   b) $a = 5$, $c = 6$ dan $\angle B = 52^o$

   Jawab :

   a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2\text{ ab Cos C}$
   $= 5^2 + 7^2 - 2{,}5.7 \text{ Cos } 68^o$
   $= 25 + 49 - 70 \;.\; 0{,}3746$
   $= 74 - 26{,}2224$
   $c^2 = 47{,}7776$
   $c = \sqrt{47{,}7776}$
   $c = 6{,}9121$
   $c = 6{,}91$

   b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2\text{ ac Cos B}$
   $= 5^2 + 6^2 - 2{,}5.6 \text{ Cos } 52^o$
   $= 25 + 36 - 60 \;.\; 0{,}8486$
   $= 61 - 50{,}8829$
   $= 10{,}1171$
   $b = \sqrt{10{,}1171}$
   $= 3{,}1807$
   $= 3{,}18$

2. Pada segitiga ABC diketahui sisi a = 5, b = 6, c = 7
Hitunglah sudut terkecil dan terbesar

a) Sudut terkecil

$$\text{Cos A} = \frac{b^2 + c^2 - a}{2bc}$$

$$= \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2.6.7}$$

$$= \frac{36 + 49 - 25}{84}$$

$$= \frac{60}{84}$$

$$= 0{,}7143$$

$$\angle A = 44{,}42^o$$

b) Sudut terbesar

$$\text{Cos C} = \frac{a^2 + b^2 - c}{2bc}$$

$$= \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2.5.6}$$

$$= \frac{25 + 36 - 49}{60}$$

$$= \frac{12}{60}$$

$$= 0{,}2000$$

$$\angle C = 78{,}46^o$$

3. Diketahui segitiga ABC, AB = 8 cm, AC = 5 cm, $\angle A = 60^0$.
Hitung panjang BC
Jawab :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$= 5^2 + 8^2 - 2.5.8. \cos 60$
$= 25 + 64 - 80. \frac{1}{2}$
$= 89 - 40$
$= 49$
$a = 7$ cm

4. Pada Δ ABC , sudut C = 30 ^{0} , b = 10 cm dan c = 6 cm, tentukan a, sudut B, dan sudut C !

Jawab

Menentukan a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2.10.6.\cos 30^0$

$a^2 = 100 + 36 - 120.1/2\sqrt{3}$

$a^2 = 136 - 60\sqrt{3}$

$a^2 = 136 - 60.\ 1,720$

$a^2 = 136 - 103,92$

$a^2 = 32,08$

$a = \sqrt{32,08} = 5,66$ cm

Menentukan sudut B:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{5,66}{\sin 30} = \frac{10}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{10.1/2}{5,66}$$

$= 0,8834$

Maka sudut B = 62,05 ^{0}

Menentukan sudut C:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{5,66}{\sin 30^0} = \frac{6}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{6.\sin 30^0}{5,66}$$

$$= \frac{6.1/2}{5,66}$$

$$= \frac{3}{5,66}$$

$= 0,5300 \rightarrow$ sudut C = 32 ^{0}

Hmmmm agar teman-teman tetap semangat, maka yook jangan kasih kendo , teman-teman lanjoottt ngerjakan latihan soalnya,

Latihan

Gunakan kalkulator untuk mengerjakan soal berikut :

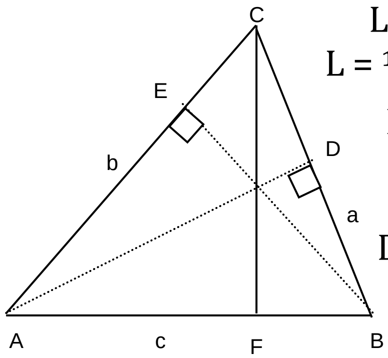
Tentukan unsur segitiga yang ditanyakan !

1) Diketahui a = 10 cm, b = 14 cm; $\angle C = 120^o$. Hitung sisi c
2) Diketahui a = 2,8 cm, c = 1,7 cm; $\angle B = 52^o$. Hitung sisi b
3) Diketahui a = 5 cm; b = 7 cm dan c = 9 cm. Hitung sudut terkecil
4) Diketahui a = 13 cm, b = 12 cm dan c = 5 cm. Hitung sudut terbesar
5) Diketahui b = 12 cm, c = 12 cm dan $\angle c = 60^o$. Hitung sisi

C. LUAS SEGITIGA

Belajar luas segitiga itu tidak hanya ½ dikali alas dan tinggi segitiga, tapi mencari luas segitiga itu banyak sekali loo rumusnya, sudah terbakar kah penasarannya, langsung aja ya teman-teman membaca dan memahami mencari asal usul luas segitiga yang diketahui dari berbagai macam jenis segitiga, ketika teman-teman memahami luas segitiga dari berbagai bentuk, teman-teman akan dengan mudah menentukan luas segitiga sebarang apa yang diketahui.

1. Menghitung luas segitiga bila diketahui dua sisi dan satu sudut apitnya



L = ½ AB . CF = ½ . BC. AD = ½ . AC . BE

L = ½ . c . b SinA = ½ . a.c Sin B = ½ . b . a SinC

Dari Δ DBA, Sin B = $\frac{AD}{AB} \Leftrightarrow$ AD = AB Sin B

AD = C Sin B

Dari Δ BCE, Sin C = $\frac{BE}{BC} \Leftrightarrow$ BE = BC Sin C

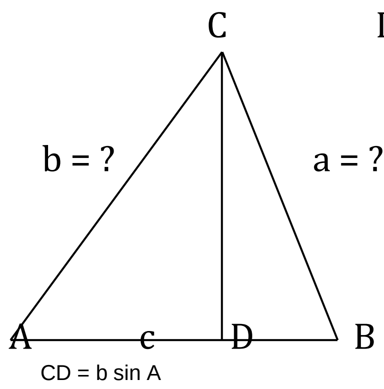
BE = a Sin C

Kesimpulan

$$L = \tfrac{1}{2} \, . \, b \, . \, c \, Sin \, A$$
$$L = \tfrac{1}{2} \, . \, a \, . \, c \, Sin \, B$$
$$L = \tfrac{1}{2} \, . \, a \, . \, b \, Sin \, C$$

CONTOH SOAL:
Hitunglah luas segitiga, dengan a = 5 cm, b = 8 cm. Sudut C = 45^0
Jawab :
L = ½ a.b.sin C
= ½ 5.8.sin 45^0
= 20. ½ $\sqrt{2}$
= 10 $\sqrt{2}$

2. **Menghitung luas segitiga yang dikatakan dua sudut dan satu sisi diapit sudut**



L = ½ . b . c. Sin A , b = dicari dulu
Dipakai aturan Sinus

$$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C} \Rightarrow b = \frac{C\ Sin\ B}{Sin\ C}$$

L = ½ . b. c Sin A
= ½ . C $\frac{Sin\ B}{Sin\ C} . c\ Sin\ A$

$$\boxed{L = \frac{C^2\ Sin\ A.Sin\ B}{2\ Sin\ C}}$$

Atau

$$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C} \Rightarrow b = \frac{C\ Sin\ B}{Sin\ C}$$

L = ½ . b. a Sin C
= ½ . $\frac{a\ Sin\ B}{Sin\ A} . a\ Sin\ C$

$$L = \frac{a^2 \ Sin\ B \,.\, Sin\ C}{2\ Sin\ A}$$

MAKA dengan cara yang sama didapatkan

$$L = \frac{b^2 \ Sin\ A \,.\, Sin\ C}{2\ Sin\ B}$$

KESIMPULAN LUAS SEGITIGA JIKA DUA SUDUT DAN SATU SISI DIAPIT SUDUT

$$L = \frac{a^2 \ Sin\ B \,.\, Sin\ C}{2\ Sin\ A} \qquad L = \frac{b^2 \ Sin\ A \,.\, Sin\ C}{2\ Sin\ B} \qquad L = \frac{C^2 \ Sin\ A . Sin\ B}{2\ Sin\ C}$$

CONTOH SOAL:

1. Diketahui Δ ABC dengan $\angle A$ = 25⁰ dan $\angle C$ = 45⁰. Jika panjang sisi b =15 cm. tentukan luas segitiga tersebut.
   Penyelesaian:
   Sudut B dapat dicari;

   $\angle B = 180^0 - (\angle A + \angle B)$
   $= 180^0 - (25^0 + 45^0)$
   $= 180^0 - 70^0$
   $= 110^0$

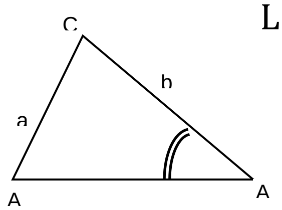
   Jadi, $L_{\Delta ABC} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$
   $= \frac{15^2 \sin 25^0 \sin 45}{2 \sin 110^0}$
   $= \frac{15^2 (0{,}4226) . \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2(0{,}939)}$
   $= 35{,}802\ cm^2$

2. Diketahui segitiga ABC dengan c = 5 cm, $\angle A = 65, \angle B = 60$. Tentukan luasnya.
   Jawab :
   $\angle C = 180 - 65 - 60 = 55$
   $L = \frac{c^2 . \sin A . \sin B}{2 \sin C}$

$$L = \frac{5^2.\sin 65.\sin 60}{2\sin 55}$$
$$L = \frac{25.0{,}425.0{,}87}{0{,}82}$$
$$L = 11{,}27$$

3. Menghitung luas segitiga bila diketahui dua buah sisi dan satu sudut yang berhadapan dengan sisi yang diketahui. Misalnya a, b dan ∠ A

Perhatikan gambar



L = ½ ab . Sin C

(1) Sudut A di cari dengan aturan Sinus

(2) Sudut C ketemu

(3) Masukkan ke Sinus luas di atas

Contoh :

- Pada Δ ABC diketahui a = 12 cm, b = 10 cm, ∠ B = 40°

Hitunglah luas Δ ABC

Jawab:

$$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{a}{Sin\ A} \Leftrightarrow Sin\ A = \frac{a\ Sin\ B}{b}$$

$$= \frac{12\ .\ Sin\ 40^\circ}{10}$$

$$= \frac{12\ .\ 0{,}6428}{10}$$

$$= \frac{7{,}7136}{10}$$

Sin A = 0,7714 ⇔ ∠ A = 50,48°

∠ C = 180° – (40° + 50,48°)

= 89,52°

L = ½ . ab Sin C

= ½ . 12 . 10 .Sin 89,52°

= 60 . 0,99996

= 59,98 cm²

- Luas Δ ABC adalah $12\sqrt{2}$ cm^2, AB = 6 cm dan AC = 8 cm, maka besar sudut adalah…

Jawab

Luas ΔABC = ½ AB.AC Sin A

$12\sqrt{2}$ = ½ 6.8. sin A

$12\sqrt{2}$ = 24. sin A

sin A = $\frac{12\sqrt{2}}{24}$

= ½ $\sqrt{2}$ → sudut A = 45^0

4. Menghitung luas segitiga bila diketahui tiga sisinya Jika S = ½ (a + b + c) = setengah keliling segitiga

Maka L = $\sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$

2S = a + b + c ⇔ 2S – 2c = a + b + c -2c

⇔ 2 (S – c) = a + b - c

2S = a + b + c ⇔ 2S – 2b = a + c + b -2b

⇔ 2 (S – b) = a + c - b

2S = a + b + c ⇔ 2S – 2a = b + c + a -2a

⇔ 2 (S – a) = b + c - a

Sin² A = 1 – Cos² A   Cos A = $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

= (1 – Cos A)(1 + Cos A)

$= \left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

Sin² A= $\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

Sin² A = $\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)}{(2bc)^2}$

$= \frac{2(S-c).2(S-b).2(S-a).2S}{4b^2c^2}$

Sin A = $\sqrt{\frac{4S(S-a)(S-b)(S-c)}{b^2c^2}}$

Sin A = $\frac{2}{bc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

L = ½ . bc . Sin A

L = ½ . b. c . $\frac{2}{bc}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$$\boxed{\textbf{L} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

Contoh Soal

Tentukan luas Δ ABC bila diketahui

1. a = 12 cm; c = 10 cm dan ∠ B = 60°
2. a = 15 cm; ∠ B = 30° dan ∠ C = 45°
3. a = 10 cm; b = 14 cm dan ∠ A = 30°
5. a = 5 cm; b = 6 cm, c = 7 cm
6. a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

Jawab

1. a = 12, c = 10, ∠B = 60°

L = ½ . a . c . Sin B = ½ . 12. 10 . Sin 60° = 60 . ½ $\sqrt{3}$ = 30 $\sqrt{3}$ cm²

2. a = 15, ∠B = 30°, ∠C = 45°,

L = $\frac{a^2 Sin B.Sin C}{2\ Sin\ A} = \frac{15^2.Sin 30°.Sin 45°}{2.Sin 105°}$

L = $\frac{225.0,5000.0,7071}{2.0,9659}$

L = $\frac{79,54875}{1,9318}$

L = 41,18 cm²

3. a = 10; b = 14; ∠A = 30°

L = ½ ab . Sin C

$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} \Leftrightarrow Sin\ B = \frac{b.Sin\ a}{a}$

$= \frac{14\ .\ Sin\ 30°}{10}$

$= \frac{14 . 1/2}{10}$

$= \frac{7}{10}$

= 0,7000

$\angle$B = 44,43°

$\angle$C = 180° – (30° + 44,43°)

$\angle$C = 180° – 74,43°

$\angle$C = 105,57°

L = ½ ab Sin C

= ½ . 10 . 14 . Sin 105,57°

= 70 . 0,963

L = 67,43 cm²

4. a = 5 cm; b = 6 cm; c = 7 cm ; s = (5+6+7)/2 = 9

L = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

L = $\sqrt{9.4.3.2}$

L = $\sqrt{216}$

L = 14,6969

L = 14,70 cm²

5. s = ½ (a + b + c) = ½ (3 + 4 + 5) = 6

$L = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$

$L = \sqrt{6.(6-3).(6-4).(6-5)}$

$L = \sqrt{6.3.2.1}$

$L = \sqrt{36} = 6$ cm²

Untuk mengasah pemahaman teman-teman tentang berbagai bentuk rumus luas segitiga yook latihan soalnya dikerjakan, biar makin top cer pemahaman teman-teman......semangattt....

Latihan

1. Hitunglah luas segitiga bila diketahui 3 unsurnya
   a) $a = 8$ cm, $b = 14$ cm, $\angle C = 60^o$
   b) $a = 17$ cm, $\angle B = 42^o$, $\angle C = 64^o$
   c) $b = 18$ cm, $c = 12$ cm dan $\angle B = 62^o$
   d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm
2. Hitunglah luas jajaran genjang ABCD, bila diketahui AB = 10 cm, AD=12 cm dan $\angle BAD = 70^o$ (Buat gambarnya)
3. Hitung luas segi enam beraturan ABCDEF yang jari-jari lingkaran luarnya 12 cm. O adalah pusat lingkaran luar. (Luas segi enam = 6 x luas OAB)

5
RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

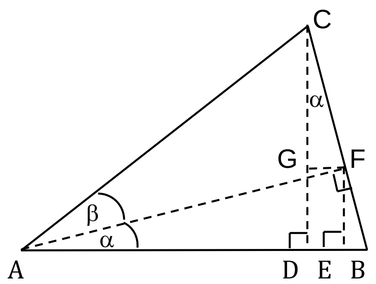
****

Rumus jumlah dan selisih sudut sangat berguna untuk teman-teman ketika mendapatkan sebuah soal atau permasalah yang bukan sudut istimewa namun tidak diperbolehkan menggunakan alat abntu hitung, bagaimana teman-teman menyelesaikannya, santuy tidak perlu takut dan gelisah, ada kok formulanya ^^, misal tentukan nilai dari sin 15 hayooo gimana, sin 15 bisa teman-teman ubah menjadi sudut istimewa dengan menggunakan aturan jumlah atau selisih dua sudut, penasaran lagi ya,,,,yokk lanjutt membaca dan memahaminya lagi

A. JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

- **Rumus cos ($\alpha + \beta$) dan cos ($\alpha - \beta$)**

Pada gambar di bawah diketahui garis CD dan AF keduanya garis tinggi dari segitiga ABC. Akan dicari rumus cos ($\alpha + \beta$).



$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC} \quad \rightarrow \quad AD = AC\cos(\alpha + \beta)$$

Pada segitiga siku–siku CGF

$$\sin \alpha = \frac{GF}{CF} \rightarrow GF = CF \sin \alpha \qquad \text{..............(1)}$$

Pada segitiga siku–siku AFC,

$$\sin \beta = \frac{CF}{AC} \rightarrow CF = AC \sin \beta \qquad \text{..............(2)}$$

$$\cos \beta = \frac{AF}{AC} \rightarrow AF = AC \cos \beta \qquad \text{..............(3)}$$

Pada segitiga siku–siku AEF,

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE = AF \cos \alpha \qquad \text{..............(4)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$GF = AC \sin \alpha \sin \beta$$

Karena DE = GF maka $DE = AC \sin \alpha \sin \beta$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$AE = AC \cos \alpha \cos \beta$$

Sehingga $AD = AE - DE$

$$AC \cos (\alpha + \beta) = AC \cos \alpha \cos \beta - AC \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Jadi untuk menentukan $\cos (\alpha - \beta)$ gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke rumus $\cos (\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned} \cos (\alpha - \beta) &= \cos (\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

- **Rumus $\sin (\alpha + \beta)$ dan $\sin (\alpha - \beta)$**

Untuk menentukan rumus $\sin (\alpha + \beta)$ dan $\sin (\alpha - \beta)$ perlu diingat rumus sebelumnya, yaitu: $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$ dan $\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \cos (90° - (\alpha + \beta)) \\ &= \cos ((90° - \alpha) - \beta) \\ &= \cos (90° - \alpha) \cos \beta + \sin (90° - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Untuk menentukan sin (α – β), seperti rumus kosinus selisih dua sudut gantilah β dengan –β lalu disubstitusikan ke sin (α + β).

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

- **Rumus tan (α + β) dan tan (α – β)**

  Dengan mengingat $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

maka

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi $$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

Untuk menentukan tan (α – β), gantilah β dengan –β lalu disubstitusikan ke tan (α + β).

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \tan(\alpha+(-\beta))\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha-\tan(\beta)}{1-\tan\alpha(-\tan\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

Jadi

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Nah bagaimana dari hasil membacanya teman-teman sudah mengerti kan asal usul rumus jumalah dan selisih dua sudut, agar lebih mudah menghafalnya ibu buatkan rangkuman rumusnya, jangn lupa dihafalkan yaa........

KESIMPULAN RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

(1) sin(A + B) = sin A cos B + cos A sin B

(2) sin(A – B) = sin A cos B – cos A sin B

(3) cos(A + B) = cos A cos B – sin A sin B

(4) cos(A – B) = cos A cos B + sin A sin B

(5) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(6) $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

CONTOH SOAL

1. Diketahui sin A = $\frac{3}{5}$ cos B = $\frac{7}{25}$,A dan B adalah sudut-sudut lancip, maka nilai Cos(A – B) =....

   Penyelesaian :

   Cos (A – B)= CosAcosB + SinAsinB

   sin A = $\frac{3}{5}$ cos B = $\frac{7}{25}$

   cos A = $\frac{4}{5}$ sin B = $\frac{24}{25}$

   Cos(A – B) =....

   = cosAcosB + sinAsinB

   = $\frac{4}{5}$ x $\frac{7}{25}$ + $\frac{3}{5}$ x $\frac{24}{25}$

   = $\frac{28}{125} + \frac{72}{125}$

   = $\frac{100}{125}$

2. Hitunglah nilai dari $Cos\,75°$

Penyelesaian:

$$Cos75° = \cos(45° + 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$
$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

3. Hitunglah nilai dari $Cos15°$

Penyelesaian:

$\cos 15^o = \cos(60^o - 45^o) = \cos 60^o \cos 45^o + \sin 60^o \sin 45^o$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

4. Diketahui : Sin A = $\frac{3}{5}$ untuk A sudut lancip

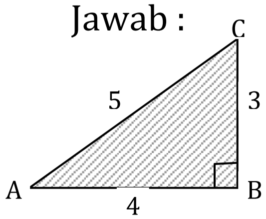
Cos B = - $\frac{12}{13}$ untuk B sudut tumpul

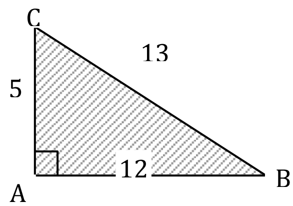
Tentukan : a. Sin (A + B)

b. Cos (B – A)

c. Tan (A – B)

Jawab :





Sin A = $\frac{3}{5}$

Cos A = $\frac{4}{5}$

Tan A = $\frac{3}{4}$

Sin B = $\frac{5}{13}$

Cos B = - $\frac{12}{13}$

Tan B = - $\frac{5}{12}$

a. Sin (A+B) = Sin A . Cos B + Cos A . Sin B

$= \frac{3}{5} . (-\frac{12}{13}) + \frac{4}{5} . \frac{5}{13}$

$= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$

b. Cos (B-A)= Cos B . Cos A + Sin B . Sin A

$$= -\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$$

c. $\text{Tan (A-B)} = \dfrac{\text{Tan A} - \text{Tan B}}{1 + \text{Tan A . Tan B}}$

$$= \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{5}{12})}{1 + \frac{3}{4}.(-\frac{5}{12})}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{15}{48}} = \frac{\frac{36}{48} + \frac{20}{48}}{\frac{48}{48} - \frac{15}{48}} = \frac{56}{33}$$

LATIHAN SOAL

Tanpa menggunakan kalkulator hitunglah nilai

1. sin 105^0 dan tan 165^0
2. cos 70^0 cos 20^0 - sin 70^0 sin 105^0
3. cos 140^0 cos 50^0 + sin 140^0 sin 50^0
4. sin 27^0 cos 33^0 + cos27^0 sin 33^0
5. sin $36{,}5^0$ cos $6{,}5^0$ – cos$36{,}5^0$ sin $6{,}5^0$
6. $a \frac{tan\ 30^0 + tan 60^0}{1 - tan\ 30^0 . tan 60^0}$ 6b. $\frac{tan\ 23^0 + tan 37^0}{1 - tan\ 23^0 . tan 37^0}$
7. Jika α dan β adalah sudut lancip dan tumpul dengan sinα= $\frac{3}{5}$ dan sinβ= $\frac{5}{13}$, maka hitunglah nilai dari sin (α+β), sin (α-β), cos (α+β), cos (α-β), tan (α+β), tan (α-β)

B. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Dari rumus–rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

1. sin 2α = sin (α + α)
 = sin α cos α + cos α sin α
 = 2 sinα cosα

MAKA DIDAPATKAN

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$

$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

MAKA DIDAPATKAN

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Rumus–rumus variasi bentuk lain yang memuat cos 2α dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

Sehingga

1) $\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$
2) $\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$
3) $\mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

3. $\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha)$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$$

$$= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

KESIMPULAN RUMUS SUDUT RANGKAP

(1) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

(3) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

(4) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(5) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(6) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

CONTOH SOAL

Diketahui $\sin a = \frac{3}{5}$ (a sudut tumpul), tentukan nilai :

a. sin 2a
b. cos 2a
c. tan 2a

Jawab :

$\sin a = \frac{3}{5}$ maka $\cos a = -\frac{4}{5}$ (karena sudut tumpul / di kuadran 2 maka nilai cos negative)

a. $\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2\ \frac{3}{5}\ (-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{25}$
b. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$
c. $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\dfrac{24}{7}$

Perlu diingat
Karena a dikudran 2 maka
$90^o < a < 180^o$ maka $\frac{1}{2}$ a di kuadran 1, yaitu :
$\frac{90^\circ}{2} < \frac{a}{2} < \frac{180^\circ}{2}$
$45^o < \frac{a}{2} < 90^o$

LATIHAN SOAL

a. Tanpa menggunakan kalkulator hitunglah
   1. $4\sin 22{,}5^0 \cos 22{,}5^0$
   2. $1\text{-}2\sin^2 75^0$
   3. $\cos^2 15^0 - \sin^2 15^0$
   4. $\dfrac{\boldsymbol{2\tan 67\frac{1}{2}^0}}{\boldsymbol{1-\tan^2 67\frac{1}{2}^0}}$

b. Jika A adalah sudut pada kuadran II , $\sin A = \frac{7}{25}$, hitunglah nilai dari Sin 2A, Cos 2A, Tan 2A

C. SUDUT PERTENGAHAN

- **Rumus untuk sin $\frac{1}{2}$ A**

  untuk menentukan rumus ini maka ingat kembali rumus sudut rangkap cos 2A

  $\cos 2A = \ 1 - 2\, sin^2 A$

  $2\, sin^2 A = 1 - \cos 2A$

  $$sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

  $$\sin \quad A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}$$

  Dengan mensubstitusikan nilai A = $\frac{1}{2}$ **A maka di dapat**

  $$\sin \frac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2(\frac{1}{2} A)}{2}}$$

  $$\sin \frac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

- **Rumus untuk cos $\frac{1}{2}$ A**

  untuk menentukan rumus ini maka ingat kembali rumus sudut rangkap cos 2A

  $\cos 2A = \ 2\, cos^2 A - 1$

  $2\, cos^2 A = 1 + \cos 2A$

  $$cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

  $$\cos \quad A = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}}$$

  Dengan mensubstitusikan nilai A = $\frac{1}{2}$ **A maka di dapat**

  $$\cos \frac{1}{2} A = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2(\frac{1}{2} A)}{2}}$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

- **Rumus untuk tan $\frac{1}{2}$ A**

  Ingat kembali bahwa nilai $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

  $\tan \frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}$ substitusikan nilai **sin $\frac{1}{2}$ A dan cos $\frac{1}{2}$ A sehingga diperoleh**

$$\tan\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

KESIMPULAN RUMUS SUDUT PERSETENGAHAN.

(1) $\sin\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

(2) $\cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

(3) $\tan\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$

Catatan

- **tanda (+) untuk sin $\frac{1}{2}$ A** diambil dari sudut-sudut yang berada di kuadran I dan II dan **tanda (-)** diambil untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran III dan IV
- **tanda (+) untuk cos $\frac{1}{2}$ A** diambil dari sudut-sudut yang berada di kuadran I dan IV dan **tanda (-)** diambil untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran II dan III
- **tanda (+) untuk tan $\frac{1}{2}$ A** diambil dari sudut-sudut yang berada di kuadran I dan III dan **tanda (-)** diambil untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran II dan IV

CONTOH SOAL

Diketahui sin a = $\frac{3}{5}$ (a sudut tumpul), tentukan nilai :

a. sin $\frac{1}{2}$ a

b. cos $\frac{1}{2}$ a

c. $\frac{1}{2}$ a

Jawab:

a. sin $\frac{1}{2}$ a = $\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ = $\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}$ = $\sqrt{\frac{9}{10}}$ = $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

b. cos $\frac{1}{2}$ a = $\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ = $\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}$ = $\sqrt{\frac{1}{10}}$ = $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

c. tan $\frac{1}{2}$ a = $\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}$ = 3 atau

tan $\frac{1}{2}$ a = $\dfrac{1-\cos a}{\sin a}$ = $\dfrac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}}$ = 3

Perlu diingat

Karena a dikudran 2 maka

90^o < a < 180^o maka $\frac{1}{2}$ a

di kuadran 1, yaitu :

$\frac{1}{2}$

Latihan Soal

1. Hitunglah nilai dari sin 15^0 , cos 15^0 , tan 15^0
2. Jika a sudut lancip dan sin α = $\frac{5}{13}$**, hitunglah** nilai dari

   s**in** $\frac{1}{2}$**A,** cos $\frac{1}{2}$**A,** tan $\frac{1}{2}$**A**

D. PERKALIAN SINUS DAN KOSINUS (BENTUK PERKALIAN KE BENTUK PENJUMLAHAN)

1. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

   a. cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\text{a.} \end{array} \; +$$

Jadi

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos}$$

b. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \end{array} \; -$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha}$

2. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

a. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array} \; +$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos}$

b. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \end{array} \; -$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin}$

RUMUS PERKALIAN SINUS DAN KOSINUS (PERKALIAN KE PENJUMLAHAN)

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

LATIHAN SOAL

1. Tanpa tabel atau kalkulator hitunglah nilai :

a. $2\sin 105^\circ \cos 75^\circ$

b. $8\cos 75^\circ \sin 15^\circ$

c. $\cos 37{,}5^\circ \cos 7{,}5^\circ$

d. $\frac{1}{2}\sin 82{,}5^\circ \sin 37{,}5^\circ$

Jawab :

a. $2 \sin 105^o \cos 75^o = \sin (105^o + 75^o) + \sin (105^o - 75^o)$

$= \sin 180^o + \sin 30^o \quad = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b. $8 \cos 75^o \sin 15^o = 4 (2 \cos 75^o \sin 15^o \quad)$

$= 4 (\sin (105^o + 75^o) - \sin (105^o - 75^o))$

$= 4 (\sin 180^o - \sin 30^o) = 4 (0 - \frac{1}{2}) = -2$

c. $\cos 37{,}5^o \cos 7{,}5^o = \frac{1}{2} (2 \cos 37{,}5^o \cos 7{,}5^o)$

$= \frac{1}{2} (\cos (37{,}5^o + 7{,}5^o) + \cos (37{,}5^o - 7{,}5^o))$

$= \frac{1}{2} (\cos 45^o + \cos 30^o) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

d. $\frac{1}{2} \sin 82{,}5^o \sin 37{,}5^o = \frac{1}{4} (2 \sin 82{,}5^o \sin 37{,}5^o)$

$= \frac{1}{4} (\cos (82{,}5^o - 37{,}5^o) - \cos (82{,}5^o + 37{,}5^o))$

$= \frac{1}{4} (\cos 120^o - \cos 45^o) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$= -\frac{1}{8}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

2. Nyatakan sebagai jumlah Sinus dan sederhanakan jika mungkin :
   a. $\text{Cos } 75^0 \text{ Cos } 15^0$
   b. Cos 2x . Sin x

   Jawab :

   a. 2 Sin A Cos B = sin (A+B) + sin (A-B)

   Sin A Cos B = ½ {Sin (A+B) + Sin (A-B)}

   Sin 75 Cos 15= ½ {Sin (75 + 15) + Sin (75 – 15)}

   $= ½ \{\text{Sin } 90^0 + \text{Sin } 60^0\}$

   $=½ \{1 + ½ \sqrt{3}\}$

   $= ½ + ¼\sqrt{3}$

   b. 2 Cos A . Sin B= Sin (A+B) – Sin (A-B)

$$\text{Cos A Sin B} = \tfrac{1}{2}\{\text{Sin (A+B)} - \text{Sin (A-B)}\}$$
$$\text{Cos 2x Sin x} = \tfrac{1}{2}\{\text{Sin } (2x + x) - \text{Sin } (2x - x)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\text{Sin } 3x - \text{Sin } x\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{ Sin } 3x - \tfrac{1}{2}\text{ Sin } x$$

E. PENJUMLAHAN SINUS DAN KOSINUS (BENTUK PENJUMLAHAN KE BENTUK PERKALIAN)

Dengan mengingat kembali rumus perkalian sinus dan kosinus (bentuk penjumlahan ke bentuk perkalian)

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta \text{.........(1)}$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \sin\beta \text{.........(2)}$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta \text{.......(3)}$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta \text{......(4)}$$

Ambil beberapa variabel baru, misalnya

$\alpha + \beta = A$

$\alpha - \beta = B$

Maka kedua bentuk pemisalan tersebut dijumlahkan dan dikurangkan, akan diperoleh

$$\begin{array}{r} (\alpha + \beta) = A \\ (\alpha - \beta) = B \\ \hline 2\alpha = A+B \end{array} +
\qquad\qquad
\begin{array}{r} (\alpha + \beta) = A \\ (\alpha - \beta) = B \\ \hline 2\beta = A-B \end{array} -$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(A + B)\text{.......(a)} \qquad\qquad \beta = \frac{1}{2}(A - B)\text{.......(b)}$$

Substitusikan persamaan (a) dan (b) ke (1),(2),(3),(4) maka akan diperoleh bentuk

$$\text{Sin A} + \text{sin B} = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\text{Sin A} - \text{sin B} = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\text{Cos A} + \text{cos B} = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\text{cos A} - \text{cos B} = -2 \sin \frac{1}{2}(A + b) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$\tan A + \tan B = \dfrac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}$

$\tan A - \tan B = \dfrac{2\sin(A-B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}$

LATIHAN SOAL

Tanpa tabel/ kalkulator hitunglah :

a. $\cos 75^o + \cos 15^o$

b. $\sin 105^o - \sin 15^o$

c. $\tan 165^o - \tan 15^o$

Jawab :

a. $\cos 75^o + \cos 15^o = 2 \cos \frac{1}{2}(75^o + 15^o) \cos \frac{1}{2}(75^o - 15^o)$

$= 2 \cos 45 \cos 30 = 2.\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $\sin 105^o - \sin 15^o = 2 \cos \frac{1}{2}(105^o + 15^o) \sin \frac{1}{2}(105^o - 15^o)$

$= 2 \cos 60^o \sin 45^o = 2\ .\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $\tan 165^o - \tan 15^o = \dfrac{2\sin(165^\circ - 15^\circ)}{\cos(165^\circ + 15^\circ) + \cos(165^\circ - 15^\circ)}$

$= \dfrac{2\sin 150^\circ}{\cos 180^\circ + \cos 150^\circ} = \dfrac{2.\frac{1}{2}}{-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{2}{-2-\sqrt{3}}$

6
GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

****

Wahh sudah masuk pada tahap menggambar ini, nih materi yang paling asyikkkk lhooo, teman-teman bisa berkreasi mencoba-coba menggambar garafik fungsi trigonometri, dari menggambar grafik dasar sin x, cos x, tan x sampai pada pengembangan menggambar grafik fungsi trigonometri, gambarnya bisa geser naik ke atas dan ke bawah bisa juga geser ke kanan maupun ke kiri sejauh sudut yang diberikan. Dengan mempelajari grafik fungsi trigonometri ini teman-teman juga bisa menjadi pesulap tanpa menggambar teman-teman bisa memprediksi nilai maksimum dan minimum grafik tersebut, dapat mengetahui kapan gamabar itu dapat berulang kembali, dimana periodiknya, nanti gambarnya geernya dimana, wahh asyik kan, tanpa menggambar teman-teman bisa tau semuanya lhooo.......daripada teman-teman penasaran gimana jadi peramal yook lanjutkan doong membacanya.....pelan-pelan saja yang penting paham ok !

Bidang koordinat adalah himpunan titik-titik $\{(x, y) | \, x \in R, \; y \in R\}$. Karena fungsi f dapat dinyatakan sebagai $f = \{(x, f(x)) | \, x \in D\}$ dengan D = domain dari *f* maka himpunan titik-titik yang didapat dari $f = \{(x, f(x)) | \, x \in D\}$ dengan D$\subset$R disebut grafik fungsi *f*. Persamaan *y* = *f*(*x*) disebut persamaan grafik *f*. Pada BAB II fungsi trigonometri didefinisikan sebagai :

$$\text{sinus} = \left\{ (\alpha, \sin\alpha) \middle| \sin\alpha = \frac{y}{r}, \alpha = \text{ukuran sudut} \right\}$$

$$\text{cosinus} = \left\{ (\alpha, \cos\alpha) \middle| \cos n\alpha = \frac{x}{r}, \alpha = \text{ukuran sudut} \right\}$$

tangen = $\left\{(\alpha, \tan\alpha) \middle| \tan\alpha = \frac{y}{x}, \alpha = \text{ukuran sudut}\right\}$,dan

seterusnya.

Apabila sudut α dinyatakan dengan :

a. Ukuran Radian

   α = x radian dan y = sin x, maka fungsi sinus $\{(x, y) | y = \sin x, x \in D\}$ditulis : sinus = $\{(x, y) | y = \sin x, x \in D\}$ dengan D = { x rad $|$ $x \in$ R } dan grafik sinus adalah sedang y = sin x disebut persamaan grafik sinus.

b. Ukuran Derajat

   α = x^o dan y = sin x^o, maka fungsi sinus ditulis : sinus = $\{(x^o, y) | y = \sin x^o, x \in D\}$ dengan D = { x^o $|$ $x \in$ R } dan grafik sinus adalah $\{(x^o, y) | y = \sin x^o, x \in D\}$sedang y = sin x^o disebut persamaan grafik sinus.

Jadi jika sudut α dinyatakan dalam radian dan α = x radian maka keenam fungsi trigonometri tersebut ditulis :

• $\{(x, y) \| y = \sin x, x \in D\}$	• $\{(x, y) \| y = \tan x, x \in D\}$
• $\{(x, y) \| y = \cos x, x \in D\}$	• $\{(x, y) \| y = \cot x, x \in D\}$
• $\{(x, y) \| y = \tan x, x \in D\}$	• $\{(x, y) \| y = \sec x, x \in D\}$

Sifat Periodik Fungsi Trigonometri

Untuk setiap sudut α dalam keadaan baku dipenuhi :

- sin α = sin (α + n.360^o), n $\in$ B
- cos α = cos (α + n.360^o), n $\in$ B
- secan α = secan (α + n.360^o), n $\in$ B
- cosec α = cosec (α + n.360^o), n $\in$ B

karena nilai fungsi tersebut **tidak** berubah bila α ditambah dengan n.360^o, maka fungsi sinus, cosinus, secan dan cosecan adalah fungsi periodik. Nilai positif terkecil dari n.360^o, n$\in$B adalah 360^o, sehingga 360^o disebut periode dari fungsi-fungsi tersebut. Jadi fungsi-sungsi sinus, cosinus, secan, dan cosecan adalah fungsi periodik dengan periode 360^o.

tetapi untuk fungsi tangen dan cotangen berlaku :

- tan α = tan (α + n.180°), n $\in$ B
- cot α = cot (α + n.180°), n $\in$ B

sehingga nilai fungsi tangen dan cotangen tidak berubah jika α ditambah dengan n.180°. karena nilai positif terkecil dari n.180° adalah 180°, maka fungsi tangen dan cotangen adalah fungsi periodik dengan periode 180°.

A. Domain Fungsi Trigonometri Sederhana

1) Fungsi Sinus

   Jika α = x rad, untuk setiap $x \in$ R maka sin $x \in$ R dengan R adalah himpunan bilangan real. Jadi domain fungsi sinus adalah D = { x rad $|$ $x \in$ R }.

   Jika α = x° maka domain fungsi sinus adalah D = { x° $|$ $x \in$ R }.

2) Fungsi Cosinus

   Jika α = x rad, Jadi domain fungsi cosinus adalah D = { x rad $|$ $x \in$ R }.

   Jika α = x° maka domain fungsi cosinus adalah D = { x° $|$ $x \in$ R }.

3) Fungsi Tangen

   Jika α = x rad, untuk x = $\frac{1}{2}\pi \to \tan\frac{1}{2}\pi$ tidak didefinisikan atau $\tan\frac{1}{2}\pi \notin$ R . demikian pula untuk $x=\frac{3}{2}\pi,\ x=\frac{5}{2}\pi,$ dst $x=\frac{1}{2}\pi+n\cdot\pi,\ n\in B$ maka : $\tan\left(\frac{1}{2}\pi+n\cdot\pi\right)\notin R$.

   Jadi domain dari fungsi tangen adalah $\left\{x \middle|\ x\neq\frac{1}{2}\pi(1+2n), n\in B, x\in R\right\}$

   Jika α = x° maka domain fungsi tangen adalah $\left\{x^{o} \middle|\ x\in R,\ x\neq 90+n\cdot 180,\ n\in B\right\}$

4) Fungsi Cotangen

   Apabila α = x rad, maka :

   x = 0 → cot 0, tidak didefinisikan

   x = π → cot π, tidak didefinisikan

   x = 2π → cot 2π tidak didefinisikan, dst.

   Jadi untuk x =, $n\in B,\ \cot n\pi\notin R$, maka domain fungsi cotangen adalah $D=\left\{x \middle|\ x\neq n\cdot\pi,\ n\in B,\ x\in R\right\}$

Tetapi jika α = x^o maka domain fungsi cotangen adalah $D = \{x^\circ \mid x \neq n \cdot 180,\ n \in B,\ x \in R\}$

5) Fungsi Secan
Apabila α = x rad, maka :
x = $\frac{1}{2}\pi \rightarrow$ sec $\frac{1}{2}\pi$, tidak didefinisikan
x = $\frac{3}{2}\pi \rightarrow$ sec $\frac{3}{2}\pi$, tidak didefinisikan
x = $\frac{5}{2}\pi \rightarrow$ sec $2\frac{5}{2}\pi$ tidak didefinisikan, dst.
Jadi untuk x = $\frac{1}{2}\pi +$ nπ, $n \in B, \sec\left(\frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi\right) \notin R$, maka domain fungsi secan adalah $D = \{x \mid x \in R,\ x \neq \frac{1}{2}\pi(1+2n)n \cdot \pi,\ n \in B,\ \}$
Tetapi jika α = x^o maka domain fungsi cotangen adalah $D = \{x^\circ \mid x \in R,\ x \neq 90(1+2n),\ n \in B\}$

6) Fungsi Cosecan
Apabila α = x rad, maka :
x = 0 $\rightarrow$ csc 0, tidak didefinisikan
x = $\pi \rightarrow$ csc π, tidak didefinisikan
Jadi untuk x = $n \cdot \pi$, $n \in B, \csc n\pi \notin R$, maka domain fungsi cosecan adalah $D = \{x \mid x \neq n \cdot \pi,\ n \in B,\ x \in R\}$
Tetapi jika α = x^o maka domain fungsi cosecan adalah $D = \{x^\circ \mid x \neq n \cdot 180,\ n \in B,\ x \in R\}$

B. Range Fungsi Trigonometri Sederhana

Yang disebut range dari fungsi adalah himpunan semua nilai fungsi. Range suatu fungsi dapat sama dengan kodomain tetapi juga dapat merupakan himpunan bagian dari kodomain.

1) Range Fungsi Sinus
Apabila satuan yang digunakan adalah radian maka sinus = $\{(x, y) \mid y = \sin x\}$.
$y = \sin x$, untuk setiap $x \in$ D maka cos $x \in$ R$\rightarrow$ $\cos^2 x \geq 0$
dari rumus **$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$** $\Leftrightarrow$ 1- $\sin^2 x = \cos^2 x$
karena $\cos^2 x \geq 0 \rightarrow 1 - \sin^2 x \geq 0$
$$\sin^2 x \leq 1$$
$$-1 \leq \sin^2 x \leq 1 \text{ atau } -1 \leq y \leq 1$$

Jadi range fungsi sinus adalah $\{y \in R | -1 \leq y \leq 1\}$

2) Range Fungsi Cosinus

$y = \cos x$, untuk setiap $x \in$ D maka sin $x \in$ R→ $\sin^2 x \geq 0$
dari rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
karena $\sin^2 x \geq 0 \rightarrow 1 - \cos^2 x \geq 0$

$$\cos^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \text{ atau } -1 \leq y \leq 1$$

Jadi range fungsi cosinus adalah $\{y \in R | -1 \leq y \leq 1\}$

3) Range Fungsi Tangen

Tangen = $\{(x, y) | y = \tan x\}$ dengan satuan radian, yaitu :

$y = \tan x \rightarrow \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

jika x di kuadran I dan $x \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ maka $\sin x \rightarrow 1$, $\cos x \rightarrow 0$, maka $\tan x \rightarrow +\infty$, jika x di kuadran IV dan $x \rightarrow \frac{3}{2}\pi$ maka $\sin x \rightarrow -1$, $\cos x \rightarrow 0$, maka $\tan x \rightarrow -\infty$, dengan demikian untuk $x \in$ D nilai fungsi tangen bervariasi antara $-\infty$ dan $+\infty$.

Jadi untuk $x \in$ D → $\tan x \in R$ maka $-\infty < \tan x < +\infty$

atau $-\infty < y < +\infty$, $y \in R$

maka range fungsi tangen adalah $\{ y \ | y \in \text{R} \}$

4) Range Fungsi Cotangen

Cotangen = $\{(x, y) | y = \cot x\}$ dengan satuan radian, yaitu:

$y = \cot x \rightarrow \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

jika x di kuadran I dan $x = 0$ maka $\cos x \rightarrow 1$, $\sin x \rightarrow 0$, maka $\cot x \rightarrow +\infty$, jika x di kuadran II dan $x \rightarrow \pi$ maka $\cos x \rightarrow -1$, $\sin x \rightarrow 0$, maka $\cot x \rightarrow -\infty$, dengan demikian untuk $x \in$ D nilai fungsi cotangen bervariasi antara $-\infty$ dan $+\infty$.

Jadi untuk $x \in$ D → $\cot x \in R$ maka $-\infty < \cot x < +\infty$

atau $-\infty < y < +\infty$, $y \in R$

maka range fungsi cotangen adalah $\{ y \mid y \in \mathrm{R} \}$

5) Range Fungsi Secan

Secan = $\{(x , y) \mid y = \sec x\}$ dengan satuan radian

Dari identitas $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ didapat :

Untuk $x \in$ D, tan $x \in$ D maka $-\infty < \tan x < +\infty$

$$\Leftrightarrow 0 \le \tan^2 x < \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \sec^2 x < \infty$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \sec^2 x - 1 < \infty$$

$$\Leftrightarrow -\infty < \sec x \le -1 \text{ atau } 1 \le \sec x < +\infty$$

Karena $y = \sec x$ maka $-\infty < y \le -1$ atau $1 \le y < +\infty$

Jadi range fungsi secan adalah $\{y \in R \mid y \le -1 \text{ v } y \ge 1\}$

6) Range Fungsi Cosecan

Cosecan = $\{(x , y) \mid y = \csc x\}$ dengan satuan radian

Dari identitas $\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$ didapat :

Untuk $x \in$ D, cot $x \in$ D maka $-\infty < \cot x < +\infty$

$$\Leftrightarrow 0 \le \cot^2 x < \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \csc^2 x < \infty$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \csc^2 x - 1 < \infty$$

$$\Leftrightarrow -\infty < \csc x \le -1 \text{ atau } 1 \le \csc x < +\infty$$

Karena $y = \csc x$ maka $-\infty < y \le -1$ atau $1 \le y < +\infty$

Jadi range fungsi secan adalah $\{y \in R \mid y \le -1 \text{ v } y \ge 1\}$

Apabila ukuran untuk sudut x dipakai ukuran radian maka domain dan range dari keenam fungsi trigonometri dapat dilihat pada tabel dibawah ini :

Fungsi	Domain	Range
$\{(x,y) \mid y = \sin x\}$	$\{x \text{ rad} \mid x \in \mathrm{R}\}$	$\{y \in R \mid -1 \le y \le 1\}$
$\{(x,y) \mid y = \cos x\}$	$\{x \text{ rad} \mid x \in \mathrm{R}\}$	$\{y \in R \mid -1 \le y \le 1\}$
$\{(x,y) \mid y = \tan x\}$	$\{x \mid x \ne \frac{1}{2}\pi(1+2n), n \in B, x \in R\}$	$\{y \mid y \in \mathrm{R}\}$
$\{(x,y) \mid y = \cot x\}$	$\{x \mid x \ne \frac{1}{2}\pi(1+2n), n \in B, x \in R\}$	$\{y \mid y \in \mathrm{R}\}$
$\{(x,y) \mid y = \sec x\}$	$\{x \mid x \in R, x \ne \frac{1}{2}\pi(1+2n)n \cdot \pi, n \in B, \}$	$\{y \in R \mid y \le -1 \vee y \ge 1\}$
$\{(x,y) \mid y = \csc x\}$	$\{x \mid x \in R, x \ne \frac{1}{2}\pi(1+2n)n \cdot \pi, n \in B, \}$	$\{y \in R \mid y \le -1 \vee y \ge 1\}$

Tetapi batas-batas nilai fungsi trigonometri tersebut juga sering ditulis :

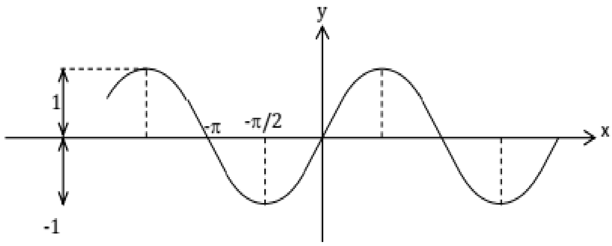
Fungsi	Batas Nilai
Sinus	$-1 \le \sin x \le 1$
Cosinus	$-1 \le \cos x \le 1$
Tangen	$-\infty \le \tan x \le +\infty$
Cotangen	$-\infty \le \cot x \le +\infty$
Secan	$-\infty < \sec x \le -1$ atau $1 \le \sec x < +\infty$
Cosecan	$-\infty < \csc x \le -1$ atau $1 \le \csc x < +\infty$

C. Grafik Fungsi Trigonometri Sederhana

1. Grafik Fungsi Sinus = { (x , y) $\mid y = \sin x, x \in$ D} dengan D = { $x \mid 0 \le x \le 2\pi$ }

Untuk menggambar grafik tersebut, digambar titik-titik (x , y) dengan $y = \sin x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ pada bidang koordinat cartesius. Jika titik-titik tersebut dihubungkan dengan kurva mulus didapat grafik fungsi sinus. Untuk menunjukkan sifat periodik dari fungsi sinus, disini digambar dengan domain $\{(x,y) \mid -2\pi \le x \le 2\pi\}$ terlihat bahwa periodik fungsi sinus adalal 2π. Selain itu terlihat pula bahwa range fungsi sinus adalah $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ dan nilai maksimun 1, nilai minimum 1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0



Gambar sinus x

2. **Grafik Fungsi Cosinus { (x, y) $|$ $y = \cos x, x \in$ D} dengan D = { x $|$ $0 \leq x \leq 2\pi$ }**

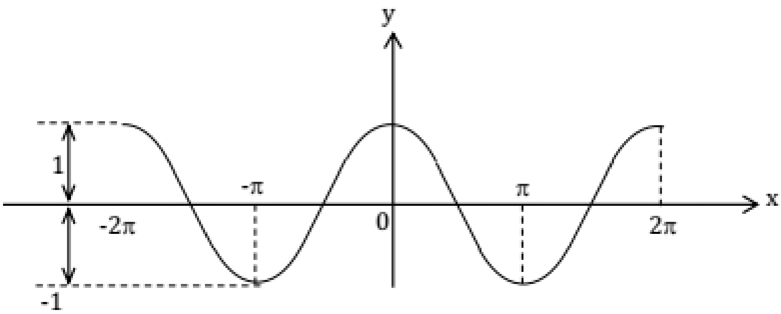
   Dengan cara seperti di atas dapat digambar grafik fungsi cosinus sebagai berikut :

   Dari identitas cos x = sin $\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)$ kita juga dapat menggambar grafik cosinus dari grafik sinus dengan translasi ke kiri $\frac{1}{2}\pi$ de ngan arah sumbu x. hal ini mudah dilihat dari gambar di atas, yaitu dengan mengeser ke kiri $\frac{1}{2}\pi$ dengan arah sumbu x.

   Dengan demikian mudah diingat bahwa :

   Periode, bentuk dan nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi cosinus sama dengan fungsi sinus. Grafik fungsi cosinus dengan domain $\{(x, y) \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$ bahwa periodik fungsi cosinus adalah 2π. Selain itu terlihat pula bahwa range fungsi cosinus adalah $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ dan nilai maksimun 1, nilai minimum 1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

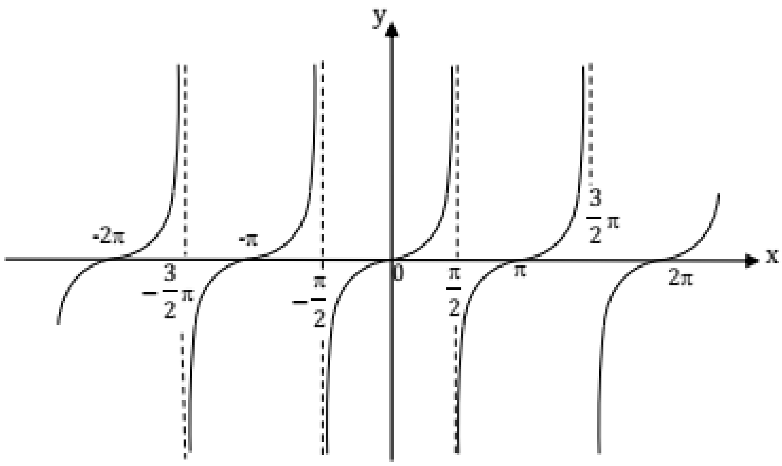


Gambar cosinus x

3. **Grafik Fungsi Tangen = { (x , y) | y = tan x, $x \in$ D} dengan Domain D = { x | $-\pi \leq x \leq \pi$, $x \neq -\frac{1}{2}\pi$, $x \neq \frac{1}{2}\pi$ }**

   Dari domain tersebut memberi keterangan kepada kita bahwa grafik tangen merupakan garis lengkung yang terputus (diskontinu) di titik dimana tan $\frac{1}{2}\pi$ dan tan $-\frac{1}{2}\pi$ tidak didefinisikan.

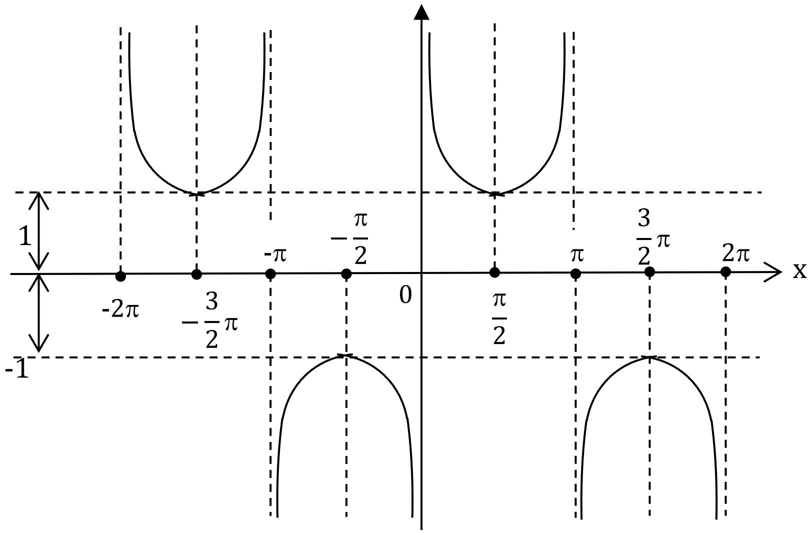
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
Tan x	0	1	Tdk terdefinisi	-1	0	1	Tdk terdefinisi	-1	0



Gambar tan x

4. **Grafik Fungsi Cosecan = { (x , y) | y = csc x, x $\in$ D} dengan Domain D = { x | - 2π ≤ x ≤ 2π , x ≠** -2π **,** $-\pi$, 0 , π , 2π **}**

   Dari identitas cosec x = $\frac{1}{\sin x}$ dan batas nilai fungsi sinus adalah $-1 \le \sin x \le 1$ maka kita dapatkan $\frac{1}{\sin x} \le -1$ atau $\frac{1}{\sin x} \ge 1$ karena untuk x = nπ, n $\in$ B cosec x tidak didefinisikan maka untuk - 2π ≤ x ≤ 2 fungsi cosecan mempunyai asimtot garis x = -2π **, x =** $-\pi$, x = 0 , x = π , atau x = 2π

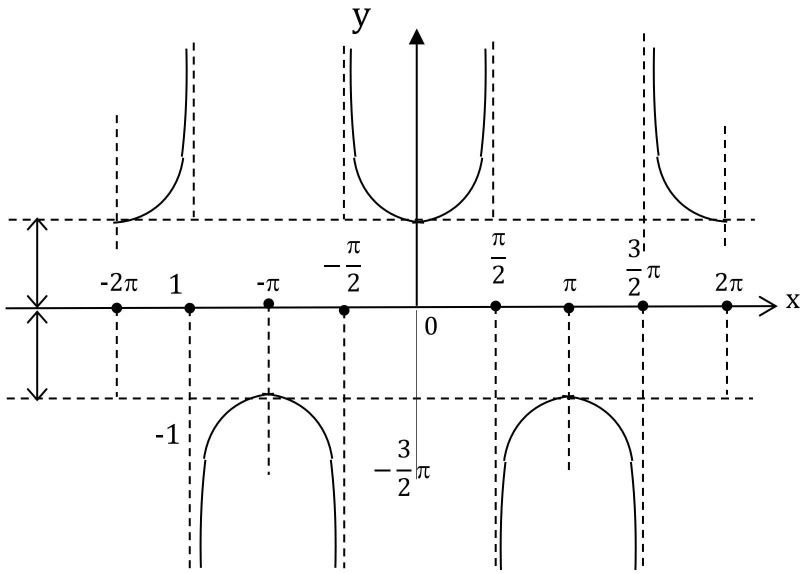


Gambar cosec x

5. **Grafik Fungsi Secan = { (x , y) | y = sec x, $x$$\in$D} dengan Domain D = { x | - 2π ≤ x ≤ 2π , x ≠** $-\frac{3}{2}\pi$ **,** $-\frac{1}{2}\pi$ **,** $\frac{1}{2}\pi$ **,** $\frac{3}{2}\pi$ **}**

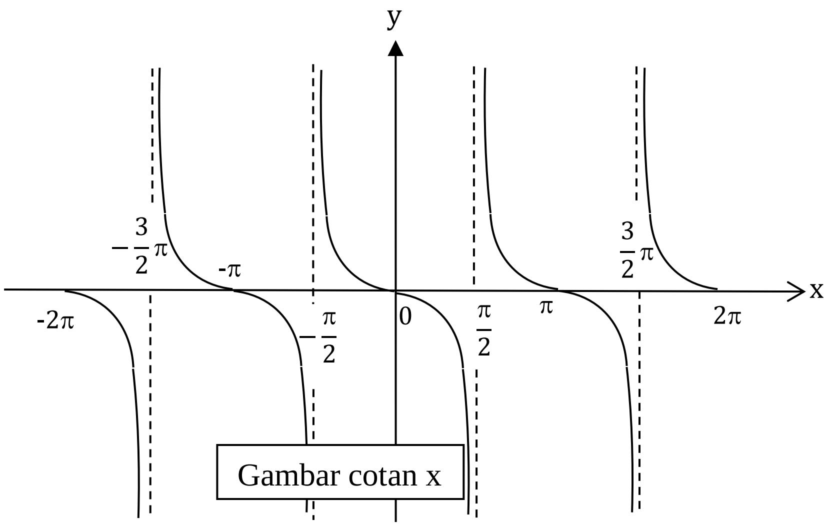
   Asimtot secan adalah garis dengan persamaan x = $-\frac{3}{2}\pi$, x = $-\frac{1}{2}\pi$, x = $\frac{1}{2}\pi$, atau x = $\frac{3}{2}\pi$ dalam interval - 2π ≤ x ≤ 2 π. Dengan cara yang sama yaitu dengan menggambar beberapa titik (x, y) , y = sec x, x $\in$ D dapat digambar grafik secan dengan menghubungkan titik-titik teseut denga kurva mulus.

Dari identitas sec x = $\frac{1}{\cos x}$ dan batas nilai fungsi cosinus $-1 \le \cos x \le 1$ maka kita dapatkan nilai $\frac{1}{\cos x} \ge 1$ atau $\frac{1}{\cos x} \le -1$. Sehingga batas nilai secan adalah $\sec x \ge 1$ atau $\sec x \le -1$.



Gambar sec x

6. **Grafik Fungsi Cotangen = { (x , y) | y = cot x, $x \in$ D} dengan Domain D ={ x | - π ≤ x ≤ π , x ≠ $-\pi$, 0 , π }**
karena cotangen pada interval **-** π **≤** x ≤ π, cot (- π**)** cot 0 dan cot π tidak didefinisikan maka grafik fungsi cotangen terputus (diskontinu). Asimtot fungsi cotangen adalah garis yang tegak lurus sumbu x dengan persamaan x = $-\pi$, x = 0 , dan x = π.
periode cotangen adalah π, sedangkan range $\{y \mid y \in R\}$ dan tidak ada nilai maksimum atau nilai minimum.



Gambar cotan x

D. Periodisitas Fungsi Trigonometri

Secara umum dikatakan bahwa jika pada suatu fungsi berlaku f(x) = f(x + p), untuk setiap x, maka fungsi tersebut adalah fungsi periode dengan periode p, sehingga dari pengertian tersebut di dapat;

(i) y = sin kx mempunyai periode $\left|\frac{1}{k}\right| \times 360^0$

(ii) y = cos kx mempunyai periode $\left|\frac{1}{k}\right| \times 360^0$

(iii) y = tan kx mempunyai periode $\left|\frac{1}{k}\right| \times 180^0$

<u>CONTOH.</u> Tentukan periode fungsi-fungsi berikut ini.

a. y = sin 6x b. y = 2 tan $\frac{1}{4}$x

Penyelsesaian:

a. y = sin 6x $\longrightarrow$ k = 6 b. y = 2 tan $\frac{1}{4}$x $\longrightarrow$ k = $\frac{1}{4}$

Periode = $\left|\frac{1}{6}\right| \times 360^0 = 60^0$, Periode = $\left|\frac{1}{1/4}\right| \times 180^0 = 720^0$

E. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi Trigonometri

Grafik y = a sin kx + b dan y = a cos kx + b mempunyai nilai maksimum $y = |a| + b$ dan nilai minimum $y = -|a| + b$. Sedangkan grafik y = tan x tidak mempunyai nilai maksimum atau minimum Amplitudo grafik suatu fungsi $= \frac{1}{2}$ (nilai maksimum-nilai minimum)

<u>CONTOH.</u> Tentukan nilai maksimum, nilai minimum dan amplitudo dari fungsi berikut.

a. $y = 3 \sin 5x + 2$

b. $y = -2 \cos 3x - 2$

c. $y = -3 \cos (6x + 20^0)$

Penyelesaian:

a. $y = 3 \sin 5x + 2$
   maks = $|3| + 2 = 5$
   min = $-|3| + 2 = -1$
   Amplitudo = $\frac{1}{2}(5+1) = 3$

b. $y = -2 \cos 3x - 2$
   maks = $|-2| - 2 = 0$
   min = $-|-2| - 2 = -4$
   Amplitudo= $\frac{1}{2}(0+4) = 2$

c. $y = -3 \cos (6x + 20^0)$
   maks = $|-3| = 3$
   min = $-|-3| = -3$
   Amplitudo = $\frac{1}{2}(3+3) = 3$

F. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri

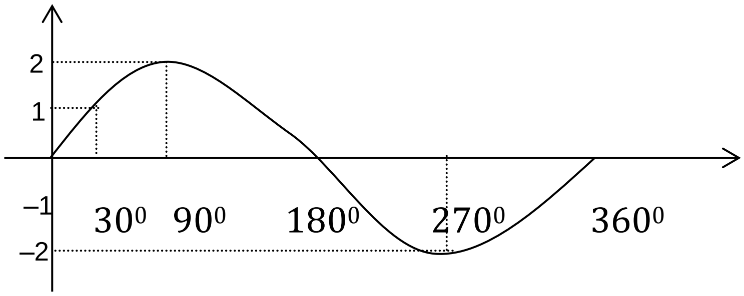
Ada beberapa cara untuk menggambar grafik fungsi trigonometri, diantaranya:

a. Tabel nilai trigonometri

CONTOH. Lukislah grafik y = 2 sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 360^0$

Penyelesaian:

x	0^0	30^0	90^0	150^0	180^0	270^0	360^0
y=2sin x	0	1	2	1	0	–2	0



b. Dengan cara menentukan koordinat titik-titik potong dengan sumbu koordinat, menentukan koordinat titik maksimum dan minimum jika ada.

CONTOH.

Gambarlah $y = 3 \cos (x - 30^0)$
Penyelesaian:
Menentukan titik potong dengan sumbu koordinat.
* Titik potong dengan sumbu X y = 0

$3 \cos (x - 30^0) = 0$

$\cos (x - 30^0) = 0$

$\cos (x - 30^0) = \cos 90^0$

(i) $x - 30^0 = 90^0 + k.\ 360^0$ (ii) $x - 30^0 = -90^0 + k.\ 360^0$

$x = 120^0 + k\ .\ 360^0$ $x = -\ 60^0 + k.\ 360^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 120^0$ $k = 1 \longrightarrow x = 300^0$

Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah $(120^0, 0)$ dan $(300^0, 0)$

* Titik potong dengan sumbu Y $\longrightarrow$ x = 0

$3 \cos (0 - 30^0) = 3 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

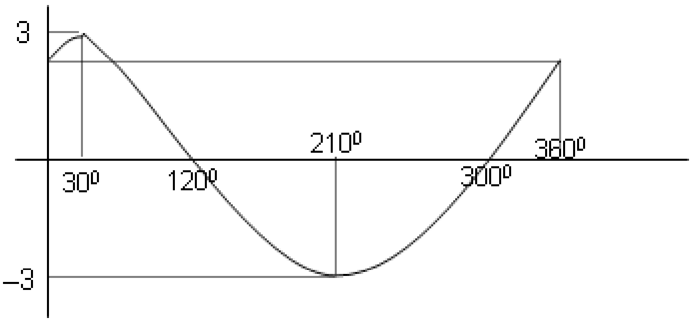
Jadi, titik potong sumbu Y adalah $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 0)$

*) Menentukan titik maksimum dan minimum

* $y = 3 \cos (x - 30^0)$	* $y = 3 \cos (x - 30^0)$
y maks = 3	y min = $-\lvert 3 \rvert = -3$
$3 \cos (x - 30^0) = 3$	$3 \cos (x - 30^0) = -3$
$\cos (x - 30^0) = 1$	$\cos (x - 30^0) = -1$
$\cos (x - 30^0) = \cos 0^0$	$\cos (x - 30^0) = \cos 180^0$
(i) $x - 30^0 = 0^0 + k.\ 360^0$	(i) $x - 30^0 = 180^0 + k.\ 360^0$
$x = 30^0 + k \cdot 360^0$	$x = 210^0 + k \cdot 360^0$
$k = 0 \longrightarrow x = 30^0$	$k = 0 \longrightarrow x = 210^0$
(ii) $x - 30^0 = 0^0 + k \cdot 360^0$	(ii) $x - 30^0 = -180^0 + k \cdot 360^0$
$x = 30^0 + k \cdot 360^0$	$x = -150^0 + k \cdot 360^0$
$k = 0 \longrightarrow x = 30^0$	$k = 1 \longrightarrow x = 2$

Jadi, titik balik maksimum Adalah $(30^0, 3)$

Jadi, titik balik minimum $(210^0, -3)$



G. Grafik Fungsi *K*f (α) dengan *k* $\in$ R, *k* ≠ 0 , atau *k* ≠ 1

Pada uraian berikut ini, F (α) melambangkan salah satu dari keenam fungsi trigonometri sudut α. Apabila F(α) dikalikan dengan sembarang bilangan real *k* (*k* ≠ 1, atau *k* ≠ 0) maka grafik fungsi *k* F(α) dapat diperoleh dari grafik F(α) dengan memeprbanyak koordinat y dari tiap-tiap titik pada grafik F(α) dengan *k* kali.

Jadi jika dilihat pada perubahannya saja grafik fungsi *k* F(α) dari grafik fungsi F(α) adalah :

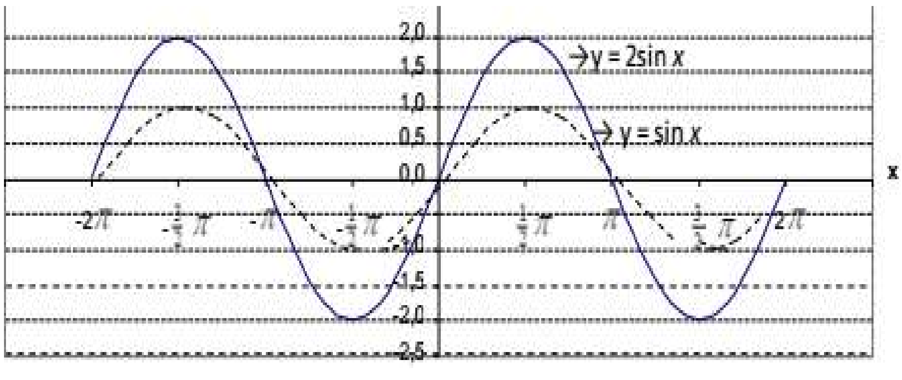
1) Jika k > 1, grafik F (α) bertambah melebar (diperbesar) k kali terhadap sumbu x.
2) Jika 0 < k < 1, grafik F (α) menyusut (diperkecil) k kali terhadap sumbu x.
3) Jika – 1 < k < 0, grafik F (α) berputar 180° terhadap sumbu x dan diperkecil k kali.
4) Jika k < – 1, grafik F (α) berputar 180° terhadap sumbu x dan diperbesar k kali.

CONTOH GRAFIK

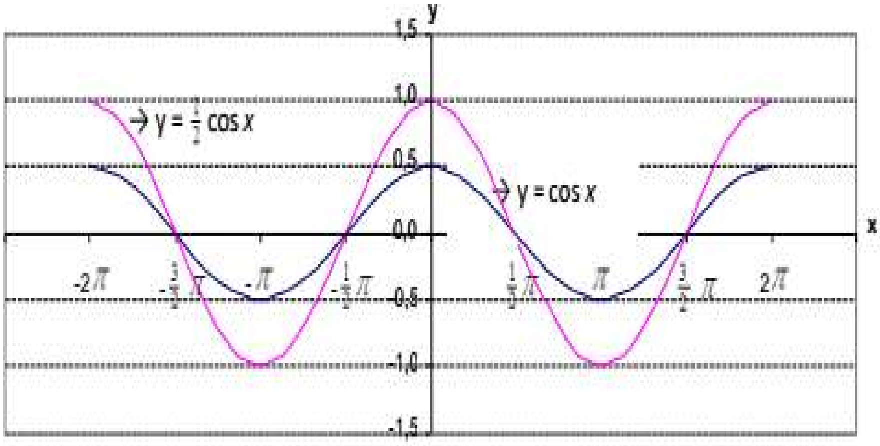
a) Gambarlah grafik fungsi $\{(x, y) | y = 2\sin x\}$ dengan domain $\{x | -2\pi \le x \le 2\pi\}$ untuk menggambar grafik fungsi ini dilakukan dengan menggambar dulu beberapa titik yang terletak pada grafik fungsi tersebut.

x	-2π	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{2}{3}\pi$	2π
y	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Disini k = 2 jadi k > 1 jika dibandingkan dengan grafik y = sin x maka grafik y = 2 sin x, terhadap sumbu x bertambah besar, sedang titik y dapat diperoleh dengna mengalikan nya sebesar 2 kali.

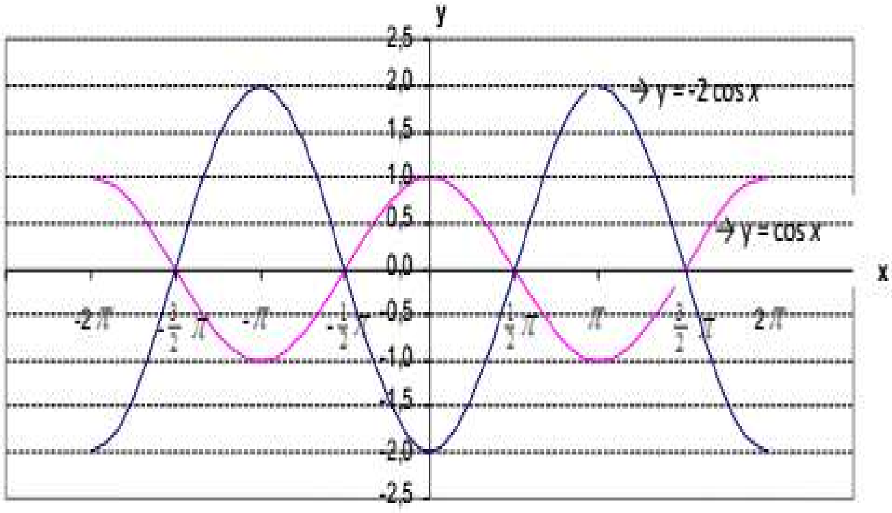


b) Gambar grafik $\{(x,y)|y=\frac{1}{2}\cos x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$



Pada contoh ini k = ½ jadi 0 < k < 1. Bandingkan grafik y =cos *x* dan y = ½ cos *x*.n terlihat disini bahwa grafik y = ½ cos *x* menyusut atau diperkecil ½ kali terhadap sumbu x.

c.) Gambar grafik fungsi $\{(x,y)|y=-2\cos x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$



Pada contoh ini k = - 2 jadi k < -1. dari gambar dapat dilihat bahwa grafik y = - 2 cos *x* berada pada arah yang berlawanan terhadap sumbu x dengan grafik y = cos *x* atau berputar 180° terhadap sumbu x. adapun bentuk grafiknya lebih besar 2 kali terhadap sumbu x.

H. Grafik Fungsi F(m α), m bilangan real m ≠ 0 atau m ≠ 1

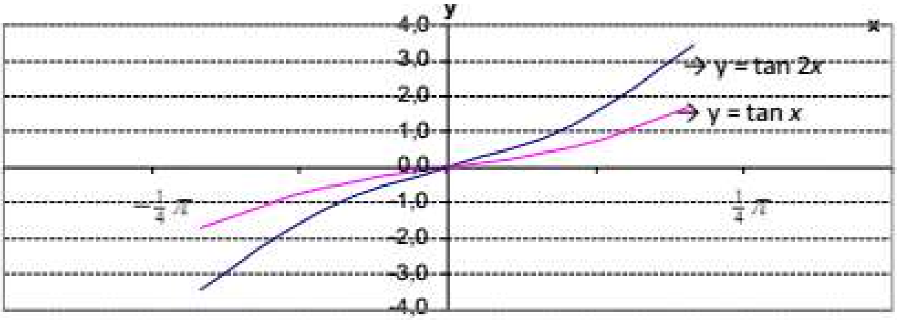
F(α)melambangkan salah satu dari keenam fungsi trigonometri sudut α. Apabila sudut α dikali dengan sembarang bilangan real m maka fungsi trigonometri disini dilambangkan dengan F(m α).

Grafik fungsi F(m α) ini dapat digolongkan menjadi dua bagian yaitu :

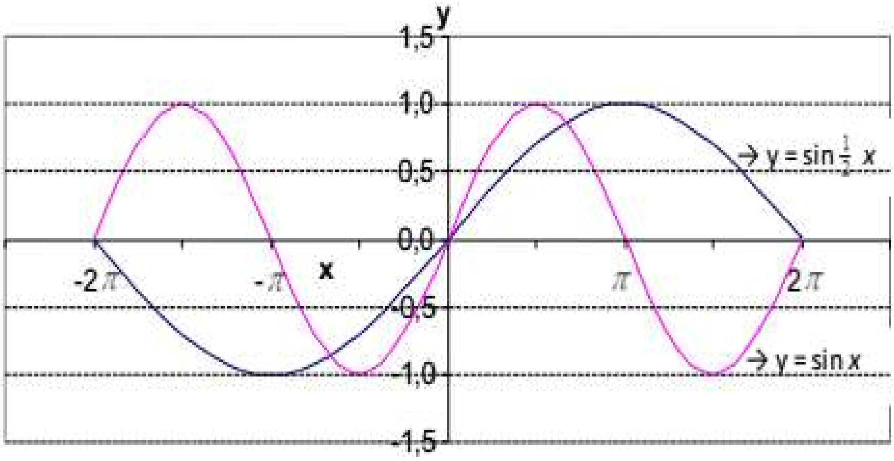
- Jika m < 0 maka periode dari fungsi F(m α) adalah $\frac{1}{|m|}$ kali dari periode F(α).
- Jika m > 0 maka periode dari fungsi F(m α) adalah $\frac{1}{m}$ kali dari periode F(α).
-

Contoh

1) Gambar garfik fungsi $\{(x,y)|y=\tan 2x\}$ dengan domain $\{x|-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi, x \neq \pm\frac{1}{4}\pi\}$ setelah itu bandingkan dengan grafik y = tan *x*.
   Dengan memperhatikan kedua grafik di atas yaitu y = tan *x* dan y =tan 2*x* terlihat bahwa periode dari tan *x* adalah $\frac{1}{2}\pi$, sedang perode dari tan 2*x* sama dengan½ kali perode tan *x*



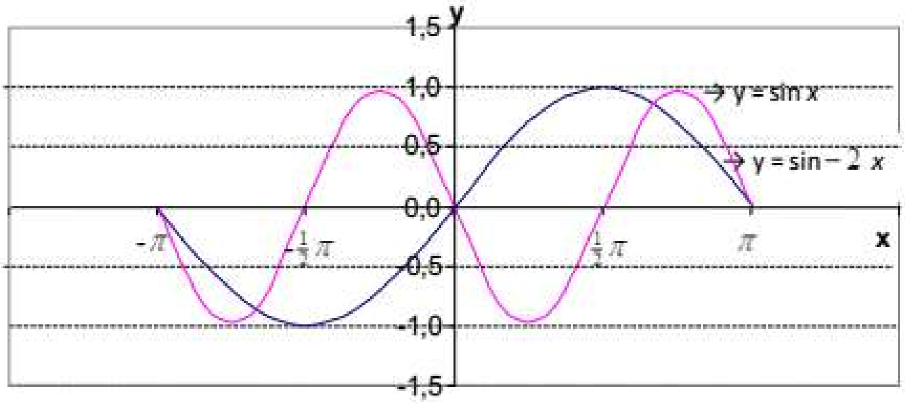
2) Gambar grafik fungsi $\{(x,y)|y=\sin\frac{1}{2}x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$ kemudian bandingkan dengan grafik y = sin *x*.



Dari gambar di atas terlihat bahwa periode untuk fungsi y = sin ½ *x* adalah 2 x 2π atau 2 kali periode sin *x*. jadi untuk fungsi F (½ *x*) periodenya 2 kali periode F(*x*).
Dari kedua contoh tersebut menunjukkan bahwa *m > 0*, maka periode fungsi F(mα) adalah $\frac{1}{m}$ kali periode fungsi F(α).

3) Jika m < 0. Berdasarkan rumus-rumus trigonometri kita tahu bahwa :
F(– mα) = – F(mα) atau F(–mα) = F(mα)
Misalnya : sin (– 2 α) = – sin 2α
tan (– 2 α) = – tan
cos (– α) = cos
cot (– 2 α) = –cot 2α
Ini berarti bahwa periode fungsi sin (– 2 α) sama dengan periose (- sin 2α) yaitu ½ kali periode sinα. Jadi pada umumnya: Jika m < 0 periode fungsi F(mα) adalah $\frac{1}{|m|}$ kali periode fungsi F(α)

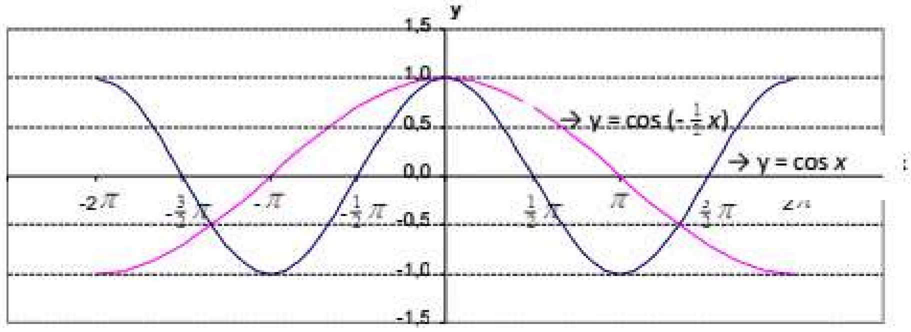
4) Gambar grafik fungsi $\{(x, y) | y = \sin(-2x)\}$ dengan domain $\{x | -\pi \le x \le \pi\}$. Bandingkan dengan grafik fungsi sin *x*.



Periode fungsi sin (-2*x*) adalah π atau ½ x 2 π , yaitu ½ kali periode sin *x*. ini berarti periode sin (- 2*x*) adalah $\frac{1}{|-2|}$ kali fungsi sin *x*. karena sin (- 2*x*) = - sin 2*x* maka grafik y = sin (- 2*x*) adalah juga grafik y = - sin 2*x*. Dengan demikian grafik y = sin (- 2*x*) terletak berlawanan arah terhadap sumbu x dengan grafik y = sin 2*x*.

5) Gambar grafik $\{(x,y)|y=\cos(-\frac{1}{2}x)\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$.

Bandingkan dengan grafik y = cos *x*.



Pada grafik y = cos (- ½ *x*) periodenya adalah 4 π atau 2 x 2 π , yaitu 2 kali periode y = cos *x*. jadi berarti periode fungsi cos (- ½ *x*) adalah $\frac{1}{|-2|}$ kali periode cos *x*.

I. Grafik Fungsi F $(\alpha+\theta)$ dengan θ adalah Sudut Konstan

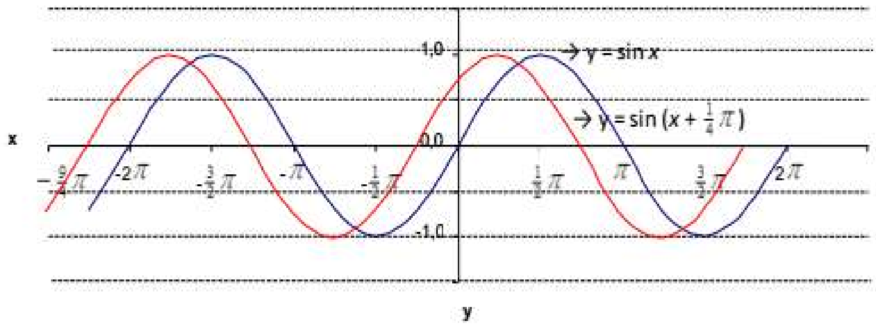
Grafik fungsi F(α + θ) dapat diperolh gari grafik F(α) dengan mentranslasikan (menggeser) interval pada sumbu α sepanjang $|\theta|$

1) Apabila θ > 0 interval pada sumbu α digeser ke kiri sepanjang $|\theta|$

2) Apabila θ < 0 interval pada sumbu α digeser ke kanan sepanjang $|\theta|$

CONTOH

1. Gambar grafik fungsi $\{(x,y)|y=\sin(x+\frac{1}{4}\pi)\}$ dengan domain $\{x|-\frac{9}{4}\pi \le x \le \frac{7}{4}\pi\}$. Bandingkan dengan grafik fungsi sin *x*.



Terlihat bahwa grafik y = sin (x + $\frac{1}{4}\pi$)sama bentuknya dengan grafik y = sin *x*, tetapi letaknya bereser ke kiri $\frac{1}{4}\pi$. Jadi untuk menggambar grafik y = sin (x + $\frac{1}{4}\pi$) karena $\frac{1}{4}\pi$ > 0, dapat dilakukan dengan menggambar grafik y = sin *x* , tetapi interval pada sumbu x digeser ke kiri $|\frac{1}{4}\pi|$.

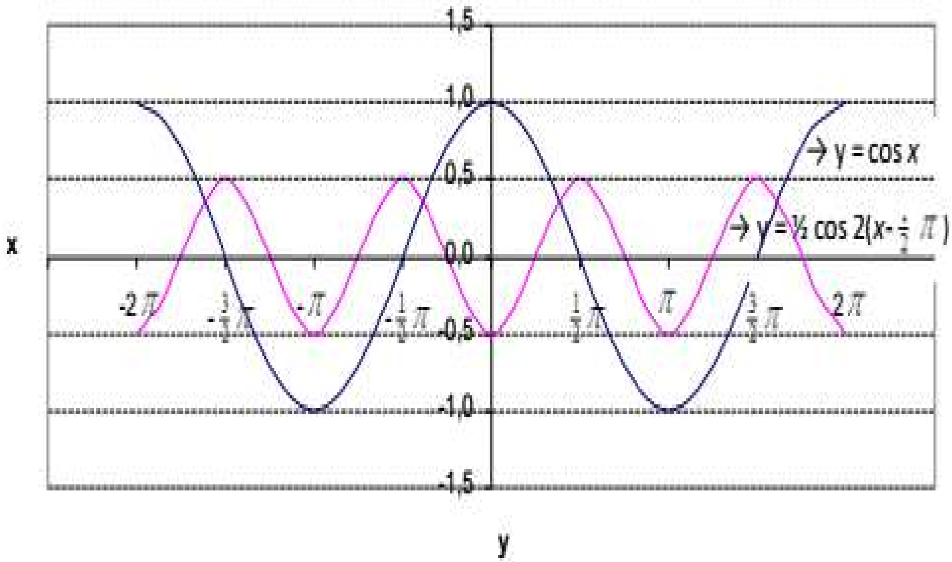
2. Gambar grafik $\{(x,y)|y=\frac{1}{2}\cos 2(x-\frac{1}{2}\pi)\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$.
   Bandingkan dengan grafik y = cos *x*.
   Untuk menggambar grafik fungsi ini dapat dilakukan dengan dua cara yaitu :

   a. menggambar beberapa titik pada grafik menurut domain, kemudian titik-titik tersebut dihubungkan dengan kurva mulus.
   b. Dengan membandingkan grafik cos *x*.

Jika dilakukan dengan cara yang ke dua maka dapat kita lakukan sebagai grafik $y = \frac{1}{2}\cos 2(x - \frac{1}{2}\pi)$ adalah fungsi trigonometri dengan bentuk kF[m($\alpha + \beta$)].

1) $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ berarti θ > 0 mak grafik $y = \frac{1}{2}\cos 2(x - \frac{1}{2}\pi)$ dapat diperoleh dari grafik cos x dengan menggeser interval sumbu x ke kanan sepanjang $\frac{1}{2}\pi$.
2) k = ½ atau 0 < k < 1 , maka grafik $y = \frac{1}{2}\cos 2(x - \frac{1}{2}\pi)$ dapat diperoleh dari grafik cos x dengan memperkecil ½ kali terhadap sumbu x.
3) m = 2, berarti m > 0 , maka periode grafik $y = \frac{1}{2}\cos 2(x - \frac{1}{2}\pi)$ ½ kali periodee grafik cos x, yaitu ½ $\times 2\pi$.

Gambar :

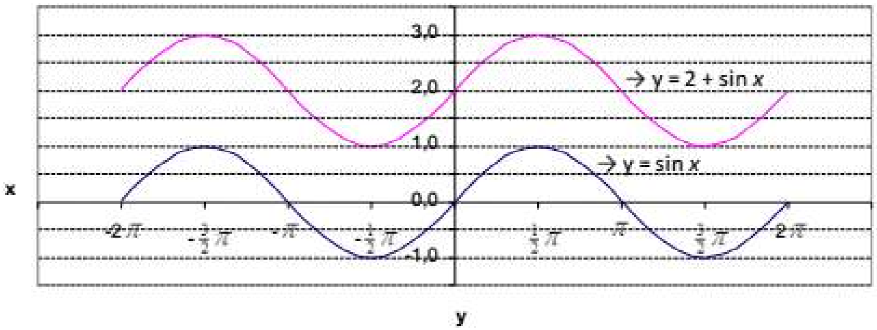


J. Grafik Fungsi F (α) = g(a) + f(α), g(a) = Fungsi Konstan.

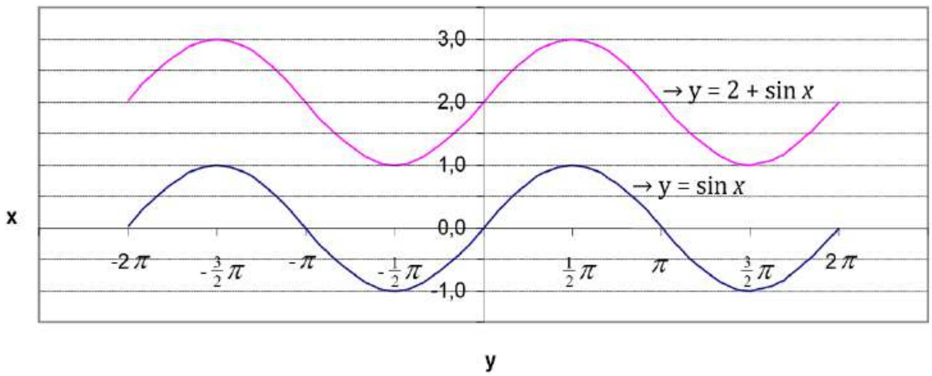
Jika f(α) adalah fungsi trigonometri sudut α, g(a) dalah fungsi konstan sedang domain dari g dan f sama, maka untuk menggambar fungsi F(α) = g(a) + f(α) adalah dengan menjumlahkan koordinat-koordinat dari tiap-tiap titik dari kedua ggrafik tersebut dari domain yang bersesuaian.

CONTOH

1. Gambar grafik $\{(x, y) | y = 2 + \sin x\}$ dengan domain $\{x | -2\pi \le x \le 2\pi\}$.
   Gambar dahulu grafik fungsi konstan dengan persamaan y = 2 dan fungsi dengan persamaan y = sin x dalam sistem koordinat Cartesius dengan domain $\{x | -2\pi \le x \le 2\pi\}$ .Kemudian dengan menjumlahkan semua koordinat dari titik-titik pada pada kedua grafik tersebut didapat grafik fungsi dengan persamaan y = 2 + sin *x*.



2. Gambar grafik $\{(x, y) | y = \cos x - 1\}$ dengan domain $\{x | -2\pi \le x \le 2\pi\}$



K. Grafik Fungsi F (α) = f(α) ± g(α)

Apabila f(α) dan g(α) masing-masing fungsi trigonometri dari sudut α dengan domain yang sama maka grafik fungsi F(α) = f (α) ± g (α) dapat diperoleh dari menjumlahkan koordinat y dari tiap-tiap titi pada grafik f (

α) dan g (α) yang sesuai dengan domainnya pada satu sumbu salib Cartesius.

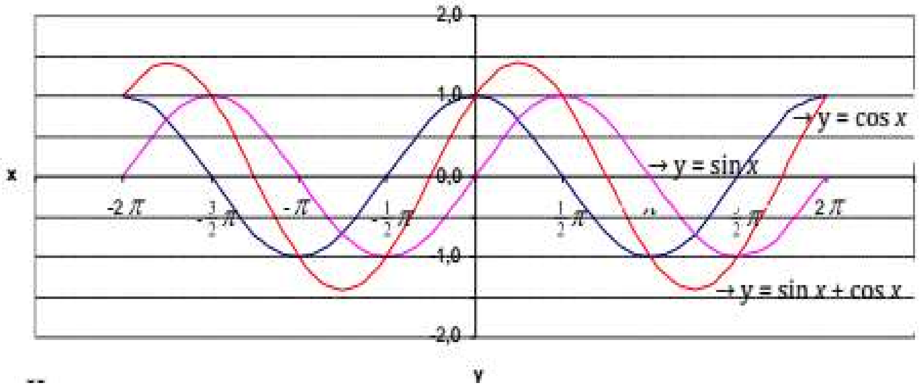
CONTOH:

1. Gambar grafik fungsi $\{(x, y) | y = \sin x + \cos x\}$ dengan domain $\{x | -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$.

   Ada bebrapa cara untuk menggambarkan grafik fungsi tersebut.

   Cara I

   Gambar dahulu grafik fungsi $y = \sin x$ kemudian $y = \cos x$ dalam satu susunan koordinat Cartesius dengan domain yang sama. Kemudian dengan menjumlahkan koordinat-koordinat y dari tiap-tiap titik pada $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ untuk domain yang besesuaian didapat grafik fungsi dengan persamaan $y = \sin x + \cos x$.



Cara II

Perhatikan fungsi $\{(x, y) | y = A \sin x + B \cos x\}$ dengan A, B masing-masing bilangan konstan sedang A dan B tidak besama-sama nol.

Persamaan y = A sin x + B cos x

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x\right]$$

Selanjutnya ada dua persamaan yang ekuivalen dengan persamaan diatas yang dapat kita pilih yaitu :

Kemungkinan I:

Misalkan $\cos\gamma = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\gamma = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ dengan $0 \le \gamma \le 2\pi$

Dengan demikian hanya ada satu γ yang memenuhinya. Sehingga:

$$y = \sqrt{A^2+B^2}\,[\cos\gamma\sin x + \sin\gamma\cos x]$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{A^2+B^2}\ \sin(x+\gamma)$$

Kemungkinan II

Misalkan $\sin\theta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ dengan $0 \le \gamma \le 2\pi$
hanya ada satu θ yang memenuhinya.

Jadi :

$$y = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right]$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{A^2+B^2}\,(\sin\theta\sin x + \cos\theta\cos x)$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{A^2+B^2}\ \cos(x-\theta)$$

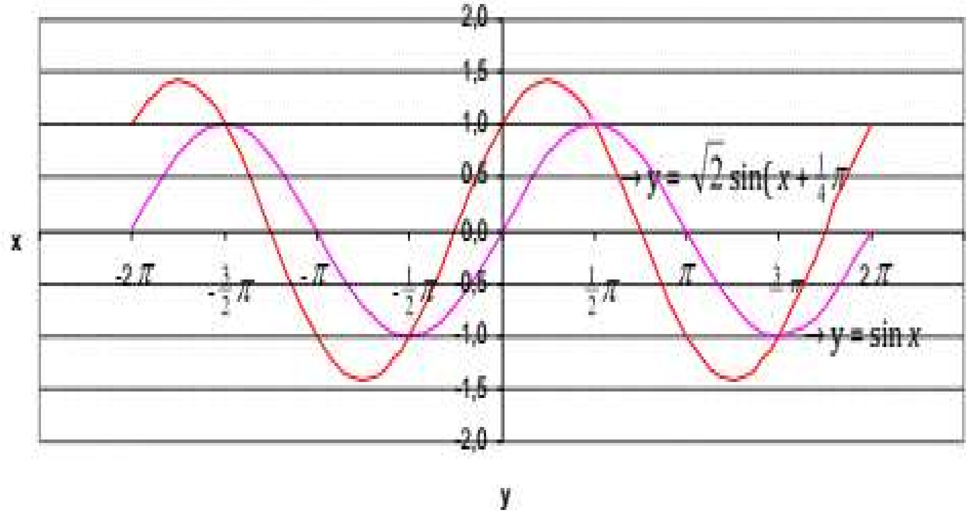
Selanjutnya kembali pada soal diatas untuk menggambar grafik fungsi $\{(x,y)|y=\sin x+\cos x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi \le x \le 2\pi\}$

Sesuai cara II :

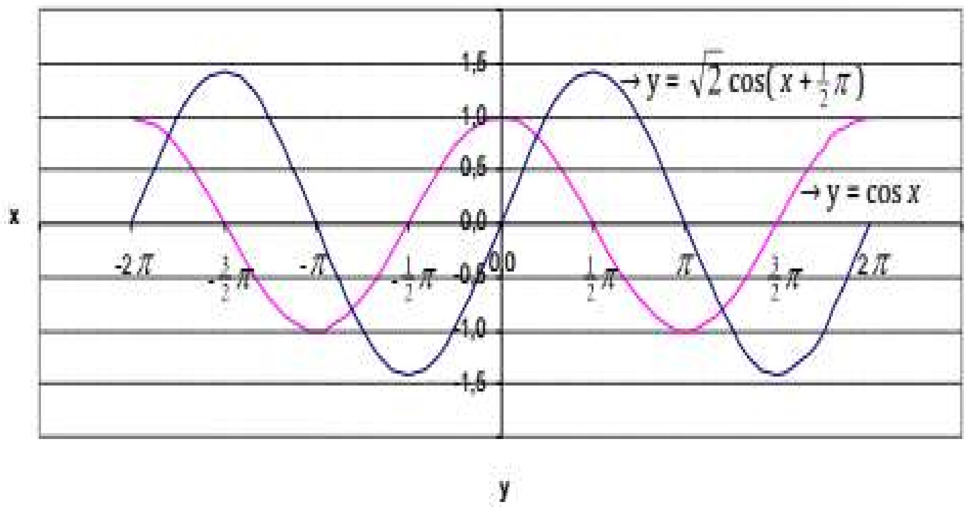
y = sin x + cos x , maka A = 1 dan B = 1

$\Leftrightarrow y = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{1}{4}\pi\right)$ atau $\Leftrightarrow y = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{1}{4}\pi\right)$ karena $\gamma = \dfrac{1}{4}\pi$ dan $\theta = \dfrac{1}{4}\pi$

Jika fungsi $\{(x, y) | y = \sin x + \cos x\}$ dinyatakan sebagai $\left\{(x, y) \middle| y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ maka grafiknya dapat diperoleh dari



Jika fungsi $\{(x, y) | y = \sin x + \cos x\}$ dinyatakan sebagai $\left\{(x, y) \middle| y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ maka grafiknya dapat diperoleh dari grafik y = cos x dengan menggeser interval pada sumbu x sepanjang $\frac{1}{4}\pi$ ke kiri terhadap sumbu x., grafik y = cos x diperbesar $\sqrt{2}$ kali.



Cara III

Cara III ini pada hakekatnya sama dengan cara II tetapi permulaannya agak berbeda.
Kita perhatikan saja persamaan y = A sin x +B cos x dengan A, B bilangan konstan, A ≠ 0, B ≠ 0.
Misalkan A sin x +cos x = k sin (x + γ), k > 0 sedang 0 $\leq \gamma \leq 2\pi$ atau dimisalkan A sin x + B cos x = k cos (x – 0), k > 0, 0 $\leq$ 0 $\leq$ 2 π.
Kita ambil pemisalan yang pertama : A sin x + B sin x = k sin (x + γ).
A sin x + cos x = k sin x cos γ + k sin γ cos x
A = k cos γ

B = k sin γ
Dari kedua persamaan ini diperoleh :
K = $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ tetapui karena k > 0 maka k = $\sqrt{A^2+B^2}$
Karena A, B tertentu mka tg γ = $\dfrac{B}{A}$ akan tertentu pula.
Untuk 0 $\leq \gamma \leq 2\pi$ maka hanya ada satu γ yang memenuhi.
Dengan demikian :

A sin x + B cos x = $\sqrt{A^2+B^2}$ sin (x + γ) → **lihat cara II.**

Selanjutnya apabila A sin x + B cos x = k cos (x – 0) maka dengan cara sama akan didapati :
A sin x + B cos x = $\sqrt{A^2+B^2}$ cos (x – 0) **lihat cara II.**
Jadi dengan cara III, persamaan y = sin x + cos x dapat dinyatakan dengan :
Misalkan sin x ≠ cos x = k sin (x + γ), k > 0, 0 $\leq \gamma \leq 2\pi$
= k sin x cos γ + k sin γ cos x

Maka $\left.\begin{array}{l} 1 = k\cos\gamma \rightarrow \cos\gamma > 0 \\ 1 = k\sin\gamma \rightarrow \sin\gamma > 0 \end{array}\right\rangle \tan\gamma = 1 \text{ atau } \tan\gamma > 0$

Karena $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ maka yanag memenuhi γ di uadran I atau γ = $\dfrac{1}{4}\pi$

$k = \sqrt{1^2+1^2} \rightarrow k = \sqrt{2}$

Jadi sin x + cos x= $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)$ dengan cara yang sama sin x + cos x= $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)$

Selanjutnya menggambar grafik fungsi : $\{(x,y)|y=\sin x+\cos x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi\le x\le 2\pi\}$ dapat dilakukan dengan menggambar grafik fungsi $\left\{(x,y)\middle|y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ atau fungsi $\left\{(x,y)\middle|y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)\right\}$ seperti pada cara II.

2. Gambar grafik fungsi $\{(x,y)|y=\sqrt{3}\cos x-\sin x\}$ dengan domain $\{x|-2\pi\le x\le 2\pi\}$.

Apabila digunakan cara II maka : $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$ disini A = $\sqrt{3}$, B = 1 → k = 2

$y=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow y=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right]$

$\Leftrightarrow y=2[\cos\gamma\sin x-\sin\gamma\cos x]$

$\Leftrightarrow y=2\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)$

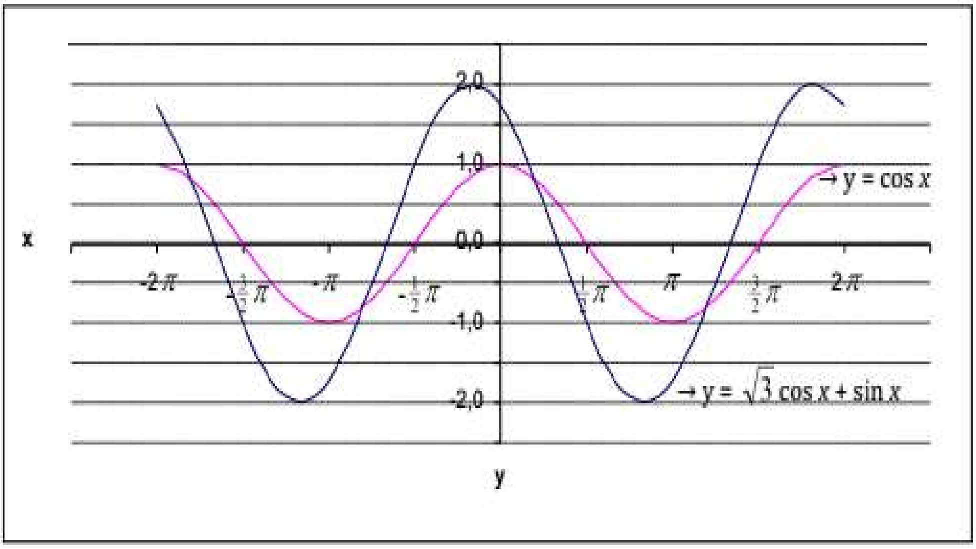
$\cos\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{3},\sin\gamma=\frac{1}{2}$

maka $\tan\gamma=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ karena

$\cos\gamma>0,\sin\gamma>0$ dan

$\tan\gamma>0\rightarrow\gamma=\frac{1}{6}\pi$

Jadi fungsi di atas dapat dinyatakan sebagai fungsi: $\left\{(x,y)\middle|y=2\cos\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)\right\}$ sehingga grafikbta dapat diperoleh dari grafik y = cos x dengan menggeser interval pada sumbu x, $\frac{1}{6}\pi$ ke kiri dan memperbesar dengan 2 kali terhadap sumbu x.



RANGKUMAN SECARA UMUM GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

$\boldsymbol{y = a \sin(bx \pm \alpha) \pm c}$

- Dari bentuk umum ini dapat dikatakan bahwa grafiknya **mempunyai nilai maksimum** $\boldsymbol{|a| \pm c}$ dan **nilai minimum** dari grafik fungsi umum y diatas adalah $\boldsymbol{-|a| \pm c}$, nilai maksimum dan minimum mempengaruhi grafik naik ke atas atau turun ke bawah dari nilai a dan c nya,
- jika $\boldsymbol{+\alpha}$ artinya grafik akan bergeser ke kiri sejauh α, $\boldsymbol{-\alpha}$ artinya grafik bergeser ke kanan sejauh α, Jadi nilai α mempengaruhi grafik geser kekanan maupun kekiri dari sumbu x.
- **Nilai "b"** menginterpretasikan bahwa pengulangan gambar yang sama dengan interval 2π adalah sebanyak b gambar, nilai **b juga menjelaskan periodik** dari grafik fungsi sin yaitu $\boldsymbol{\frac{2\pi}{b}}$

$\boldsymbol{y = a \cos(bx \pm \alpha) \pm c}$

- Dari bentuk umum ini dapat dikatakan bahwa grafiknya **mempunyai nilai maksimum** $\boldsymbol{|a| \pm c}$ dan **nilai**

minimum dari grafik fungsi umum y diatas adalah $-|\boldsymbol{a}| \pm \boldsymbol{c}$, nilai maksimum dan minimum mempengaruhi grafik naik ke atas atau turun ke bawah dari nilai a dan c nya,

- jika $+\boldsymbol{\alpha}$ artinya grafik akan bergeser ke kiri sejauh α, $-\boldsymbol{\alpha}$ artinya grafik bergeser ke kanan sejauh α, Jadi nilai α mempengaruhi grafik geser kekanan maupun kekiri dari sumbu x.
- **Nilai "b"** menginterpretasikan bahwa pengulangan gambar yang sama dengan interval 2π adalah sebanyak b gambar, nilai **b juga menjelaskan periodik** dari grafik fungsi sin yaitu $\boldsymbol{\frac{2\pi}{b}}$

Untuk intepretasi grafik secara umum sin dan cos adalah sama, yang membedakan adalah hasil dari grafik yang di peroleh,

$\boldsymbol{y = a\tan(bx \pm \alpha) \pm c}$

- Dari bentuk umum ini dapat dikatakan bahwa grafiknya **tan tidak memiliki nilai maksimum maupun minimum sehingga simbol a dan c tidak mempengaruhi apapun dalam menggambar grafik tan , karena nilai maksimum adalah tak hingga dan minimumnya negatif tak hingga**
- jika $+\boldsymbol{\alpha}$ artinya grafik akan bergeser ke kiri sejauh α, $-\boldsymbol{\alpha}$ artinya grafik bergeser ke kanan sejauh α, Jadi nilai α mempengaruhi grafik geser kekanan maupun kekiri dari sumbu x.
- **Nilai "b"** menginterpretasikan bahwa pengulangan gambar yang sama dengan interval π adalah sebanyak b gambar, nilai **b juga menjelaskan periodik** dari grafik fungsi tan yaitu $\boldsymbol{\frac{\pi}{b}}$

7
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAAMAAN TRIGONOMETRI

****

A. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih fungsi trigonometri, dan perbandingan trigonometri suatu sudut, di mana sudutnya dalam ukuran derajat atau radian. Menyelesaikan persamaan trigonometri adalah menentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan tersebut sehingga jika dimasukkan nilainya akan menjadi benar.

1. Menyelesaikan persamaan sin $x = \sin \alpha$

Dengan mengingat rumus

sin (180° - α) = sin α dan sin (α + k. 360°) = sin α, maka diperoleh:

Jika $\sin x = \sin \alpha$ maka
$x = \alpha + \text{k}.\ 360°$ atau $x = (180° - \alpha) + k.\ 360°$, $k \in$

2. Menyelesaikan persamaan cos $x = \cos \alpha$

Dengan mengingat rumus

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ dan cos (α + k. 360°) = cos α, diperoleh

Jika $\cos x = \cos \alpha$ maka
$x = \alpha + k.\ 360°$ atau $x = -\alpha + k.\ 360°$, $k \in$ B

3. Menyelesaikan persamaan tan $x = \tan \alpha$

Dengan mengingat rumus

tan (180° + α) = tan α dan tan (α + k. 360°) = tan α, maka diperoleh

Jika $\tan x = \tan \alpha$ maka
$x = \alpha + k.\ 180^\circ$, $k \in B$

RUMUS PERSAMAAN TRIGONOMETRI

- Jika $\sin x = \sin \alpha$ maka
  $x = \alpha + k.\ 360^\circ$ atau $x = (180^\circ - \alpha) + k.\ 360^\circ$, $k \in B$
- Jika $\cos x = \cos \alpha$ maka
  $x = \alpha + k.\ 360^\circ$ atau $x = -\alpha + k.\ 360^\circ$, $k \in B$
- Jika $\tan x = \tan \alpha$ maka
  $x = \alpha + k.\ 180^\circ$, $k \in B$

CONTOH SOAL

Tentukan himpunan penyelesaian :

a. Sin x = Sin 20^0 ; $0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$x_1 = 20 + k.360$, untuk k = 0 $\longrightarrow$ $x_1 = 20$

k = 1 $\longrightarrow$ $x_2 = 20 + 360$

= 380 (tidak memenuhi)

$X_2 = (180 - 20) + k.360$, untuk k = 0 $\longrightarrow$ $x_2 = 160$

Jadi HP = {20, 160}

b. Sin x = $\frac{1}{2}$; $0 \le x \le 360^0$

Jawab:

Sin x = $\frac{1}{2}$

Sin x = Sin 30^o

x = $30^o + k\ .\ 360^o$

$x = \alpha + k.\ 360^\circ$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 30^\circ$

$x = (180^\circ - \alpha) + k.360^\circ$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

HP : {30^o, 150^o}

c. $\sin x = \sqrt{3}$; $0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$\sin x = \sqrt{3}$

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin x = \sin 60^0$

(i) $x = 60^0 + k \,.\, 360^0$ (ii) $x = (180^0 - 60^0) + k \,.\, 360^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 60^0$ $k = 0 \longrightarrow x = 120^0$

Jadi, HP = $\{ 60^0, 120^0\}$

d. $2 \sin 2x = 1$, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$2 \sin 2x = 1$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = \sin 30^0$

(i) $2x = 30^0 + k \,.\, 360^0$ (ii) $2x = (180^0 - 30^0) + k \,.\, 360^0$

$x = 15^0 + k \,.\, 180^0$ $2x = 150^0 + k \,.\, 360^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 15^0$ $x = 75^0 + k \,.\, 180^0$

$k = 1 \longrightarrow x = 195^0$ $k = 0 \longrightarrow x = 75^0$

$k = 1 \longrightarrow x = 225^0$

Jadi, HP = $\{ 15^0, 75^0, 195^0, 225^0 \}$

e. $2 \sin 2x = 1$, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

$2 \sin 2x = \sqrt{3}$

$\sin 2x = ½ \sqrt{3}$

$\sin 2x = \sin 60^0$ maka

(i) $2x = 60^0 + k \,.\, 360^0$

$x = 30^0 + k \,.\, 180^0$

$k = 0 \rightarrow x = 30^0 + 0 \,.\, 180^0 = 30^0$

$k = 1 \rightarrow x = 30^0 + 1 \,.\, 180^0 = 210^0$

$k = 2 \rightarrow x = 30^0 + 2.180^0 = 390^0$ (tidak memenuhi)

(ii) $2x = 180^0 - 60^0 + k \,.\, 360^0$

$2x = 120^0 + k \,.\, 360^0$

$x = 60^0 + k \,.\, 180^0$

$k = 0 \rightarrow 60^0 + 0 \,.\, 180^0 = 60^0$

$k = 1 \rightarrow 60^0 + 1 \,.\, 180^0 = 240^0$

$k = 2 \rightarrow 60^0 + 2.180^0 = 420^0$ (tidak memenuhi)

Jadi Hp = $\{30^0, 60^0, 210^0, 240^0\}$

f. 2 Cos x = $\sqrt{3}$; $0 \le x \le 360^0$

Jawab:

2 Cos x = $\sqrt{3}$

Cos x = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Cos x = Cos 30

X_1 = 30 + k.360 , untuk k = 0 $\rightarrow x_1$ = 30

X_2 = -30 + k.360, untuk k = 0 $\rightarrow$ x_1 = - 30 (tidak memenuhi)

K = 1 $\rightarrow x_2$ = 330

HP = {30, 330}

g. $\cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 0 \le x \le 360^0$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

cos 2x = Cos 60^0 maka :

(i) 2x = 60^0 + k . 360^0

x = 30^0 + k . 180^0

k = 0 $\rightarrow$ x = 30^0 + 0 . 180^0 = 30^0

k = 1 $\rightarrow$ x = 30^0 + 1 . 180^0 = 210^0

k=2 $\rightarrow$ x = 30^0+2. 180^0 = 390^0 (tidak memenuhi)

(ii)2x = -60^0 + k . 360^0

x = -30^0 + k . 180^0

k = 0 $\rightarrow$ x = -30^0+0.180^0= -30^0 (tidak memenuhi)

k = 1 $\rightarrow$ x = -30^0 + 1 . 180^0 = 150^0

k = 2 $\rightarrow$ x = -30^0 + 2 . 180^0 = 330^0

k = 3 $\rightarrow$ x =-30^0+3.180^0= 510^0 (tidak memenuhi)

Jadi Hp = {30^0, 150^0, 210^0, 330^0}

h. 2 cos x + 1 = 0, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

2 cos x + 1 = 0

2 cos x = – 1

cos x = – $\frac{1}{2}$

cos x = cos 120^0

(i) x = 120^0 + k . 360^0 (ii) x = – 120^0 + k . 360^0

k = 0 $\rightarrow$ x = 120^0 k = 1 $\rightarrow$ x= 240^0

Jadi, HP = { 120^0, 240^0}

i. $2\cos(x + 45^0) = \sqrt{2}$, dengan $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$2\cos(x + 45^0) = \sqrt{2}$

$\cos(x + 45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos(x + 45^0) = \cos 45^0$

(i) $x + 45^0 = 45^0 + k \cdot 360^0$ (ii) $x + 45^0 = -45^0 + k \cdot 360^0$

$x = k \cdot 360^0$ $x = -90^0 + k \cdot 360^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 0^0$ $k = 1 \longrightarrow x = 270^0$

$k = 1 \longrightarrow x = 360^0$

Jadi, HP = { 0^0, 270^0, 360^0 }

j. $\tan x = -\sqrt{3}$ dengan $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$\tan x = -\sqrt{3} \rightarrow \tan x = \tan 120°$

$x = \alpha + k.\ 180°$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 120°$

untuk $k = 1 \rightarrow x = 120° + 180° = 300°$

Jadi, HP = { 120^0, 300^0 }

a. $\tan 2x = \sqrt{3}$, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$\tan 2x = \sqrt{3}$

$\tan 2x = \tan 60^0$

$2x = 60^0 + k \cdot 180^0$

$x = 30^0 + k \cdot 90^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 30^0$

$k = 1 \longrightarrow x = 120^0$

$k = 2 \longrightarrow x = 210^0$

$k = 3 \longrightarrow x = 300^0$

Jadi, HP = { 30^0, 120^0, 210^0, 300^0 }

$\sqrt{3}\tan 3x = -1$, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

$\sqrt{3}\tan 3x = -1$

$\tan 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \leftrightarrow \tan 3x = \tan 150^0$

maka : $3x = 150^0 + k \cdot 180^0$

$x = 50^0 + k \cdot 60^0$

$k = 0 \rightarrow x = 50^0 + 0 \,.\, 60^0 = 50^0$, $k = 3 \rightarrow x = 50^0 + 3 \,.\, 60^0 = 230^0$
$k = 1 \rightarrow x = 50^0 + 1 \,.\, 60^0 = 110^0$, $k = 4 \rightarrow x = 50^0 + 4 \,.\, 60^0 = 290^0$
$k = 2 \rightarrow x = 50^0 + 2 \,.\, 60^0 = 170^0$, $k = 5 \rightarrow x = 50^0 + 5 \,.\, 60^0 = 350^0$
$k = 6 \rightarrow x = 50^0 + 6 \,.\, 60^0 = 410^0$ (tdk memenuhi)
Jadi Hp = $\{50^0, 110^0, 170^0, 230^0, 290^0, 350^0, 410^0\}$

1. $\tan(x + 20^0) - \sqrt{3} = 0$, untuk $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab:

$\tan(x + 20^0) - \sqrt{3} = 0$
$\tan(x + 20^0) = \sqrt{3}$
$\tan(x + 20^0) = \tan 60^0$
$x + 20^0 = 60^0 + k \,.\, 180^0$
$x = 40^0 + k \,.\, 180^0$
$k = 0 \longrightarrow x = 40^0$
$k = 1 \longrightarrow x = 220^0$
Jadi, HP = $\{ 40^0, 220^0 \}$

LATIHAN SOAL

- Selesaikan persamaan berikut untuk $0^0 \le x \le 360^0$
  a. Cos x = Cos 50
  b. Sin x – ½ = 0
  c. $3 \tan 2x + \sqrt{3} = 0$
  d. 2 cos x.sin x = sin x
- Tentukan himpunan penyelesaian untuk $0 \le x \le 2\pi$
  e. 2 sin x = - 2
  f. 2 tan 3x + 2 = 0
  g. 2 cos ½ x = 1

4. Persamaan Trigonometri dalam bentuk a cos x + b sin x = c

Cara penyelesaian persamaan tersebut di atas sebagai berikut:

$k \cos x\,(x - \alpha) = c$
dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\alpha = \arctan \dfrac{b}{a}$

CONTOH

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan:

Cos y – Sin y = 1, jika $0^0 \le y \le 360^0$

Jawab:

Cos y – Sin y = 1 ↔ a = 1; b = - 1 ; c = 1

Sehingga diperoleh k = $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Tan α = $\frac{a}{b} = \frac{1}{-1}$ = - 1 ↔ α dikuadran IV

α = 315^o

jadi Cos y – Sin y = 1

↔ $\sqrt{2}$ Cos (x – 315^o) = 1

↔ Cos (x – 315^o) = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

↔ Cos (x – 315^o) = Cos 45^o

↔ (x – 315^o) = 45^o + k . 360^o

↔ x = 360^o + k . 360^o

↔ x = 360^o

Atau (x – 315^o) = - 45^o + 360^o

x = 270^o + k . 360^o

x = 270^o

HP:{270^o, 360^o}

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan: 3cos x + √3sin x = √3 , jika $0^0 \le x \le 360^0$

Jawab :

3cos x + √3sin x = √3

k = $\sqrt{3^3+\sqrt{3^2}}$ = $\sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

tgn α = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ → α = 30^0

3cos x + √3sin x = √3

kcos (x-α) = √3

2√3cos (x – 30^0) = √3

cos (x – 30^0) = $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

cos (x – 30^0) = ½

cos (x – 30^0) = cos 60

maka berlaku

(i). $x - 30^0 = 60^0 + k.\ 360^0$

$x = 90^0 + k.\ 360^0$

$k=0 \rightarrow x = 90^0$

$k=1 \rightarrow x = 450^0$ (tidak memenuhi)

(ii). $x - 30^0 = -60^0 + k.360^0$

$x = -30^0 + k.360^0$

$k=0 \rightarrow x = -30^0$ (tidak memenuhi)

$k=1 \rightarrow x = 330^0$

$k=2 \rightarrow x = 690^0$ (tidak memenuhi)

Jadi Hp: { 90^0, 330^0 }

3. Tentukan HP dari sin $\frac{1}{2}x = \cos x$, untuk $-360^0 \leq x \leq 360^0$

Penyelesaian:

$\sin \frac{1}{2}x = \cos x$

$\sin \frac{1}{2}x = \sin (90^0 - x)$

(i) $\frac{1}{2}x = (90^0 - x) + k\ .\ 360^0$, (ii) $\frac{1}{2}x = (180^0 - (90^0 - x)) + k\ .\ 360^0$

$\frac{1}{2}x + x = 90^0 + k\ .\ 360^0$ | $\frac{1}{2}x = (180^0 - 90^0 + x) + k\ .\ 360^0$

$\frac{3}{2}x = 90^0 + k\ .\ 360^0$ | $\frac{1}{2}x = 90^0 + x + k.\ 360^0$

$x = 60^0 + k.\ 240^0$ | $-\frac{1}{2}x = 90^0 + k.\ 360^0$

$k = -1 \longrightarrow x = -180^0$ | $x = -180^0 - k\ .\ 720^0$

$k = 0 \longrightarrow x = 60^0$ | $k = 0 \longrightarrow x = -180^0$

$k = 1 \longrightarrow x = 300^0$

Jadi, HP = { -180^0, 60^0, 300^0 }

4. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut, untuk $0 \leq x \leq 360^0$!
   a. $\text{Sin}\ (60^0 + 2x) - \text{Sin}\ (60^0 - x) = 1$
   b. $\text{Sin}\ 5x - \sin x = 0$
   c. $\text{Cos}\ 4x - \text{Cos}\ 2x = 0$

JAWAB

a. **$\text{Sin}\ (60^0 + 2x) - \text{Sin}\ (60^0 - x) = 1$**

$2\ \text{Cos}\ 60^0\ \text{Sin}\ x = 1$

$2\ .\ \frac{1}{2}\ \text{Sin}\ x = 1$

$\text{Sin}\ x = 1$

$\text{Sin}\ x = \text{Sin}\ 90^0$ maka :

(i) $x = 90^0 + k\ .\ 360^0$

$k = 0 \rightarrow x = 90^0 + 0\ .\ 360^0 = 90^0$

$k = 1 \rightarrow x = 90^0 + 1\ .\ 360^0 = 450^0$

(tidak memenuhi)

(ii) $x = 180^0 - 90^0 + k\ .\ 360^0$

$x = 90^0 + k\ .\ 360^0$

$k = 0 \rightarrow x = 90^0 + 0\ .\ 360^0 = 90^0$

$k = 1 \rightarrow x = 90^0 + 1\ .\ 360^0 = 450^0$

(tidak memenuhi)

Jadi Hp = $\{90^0\}$

b. **$\text{Sin}\ 5x - \sin x = 0$**

$\leftrightarrow \text{Sin}\ (3x + 2x) - \text{Sin}\ (3x\text{-}2x) = 0$

$\leftrightarrow 2\ \text{Cos}\ 3x\ .\ \text{Sin}\ 2x = 0$

$\leftrightarrow \text{Cos}\ 3x = 0$ atau $\text{Sin}\ 2x = 0$

Untuk $\text{Cos}\ 3x = 0 \leftrightarrow \text{Cos}\ 3x = \text{Cos}\ 90^0$ maka :

(i) $3x = 90^0 + k\ .\ 360^0$

$x = 30^0 + k\ .\ 120^0$

$k = 0 \rightarrow x = 30^0 + 0\ .\ 120^0 = 30^0$

$k = 2 \rightarrow x = 30^0 + 2\ .\ 120^0 = 270^0$

$k = 1 \rightarrow x = 30^0 + 1\ .\ 120^0 = 150^0$

$k = 3 \rightarrow x = 30^0 + 3\ .\ 120^0 = 390^0$

(tidak memenuhi)

(ii) $3x = 90^0 + k\ .\ 360^0$

$x = -30^0 + k\ .\ 120^0$

$k = 0 \rightarrow x = -30^0 + 0\ .\ 120^0 = -30^0$

(tidak memenuhi)

$k = 1 \rightarrow x = -30^0 + 1\ .\ 120^0 = 90^0$

$k = 2 \rightarrow x = -30^0 + 2\ .\ 120^0 = 210^0$

$k = 3 \rightarrow x = -30^0 + 3\ .\ 120^0 = 330^0$

$k = 4 \rightarrow x = -30^0 + 4 \cdot 120^0 = 450^0$
(tidak memenuhi)
Untuk Sin 2x = 0 ↔ Sin 2x = Sin 0 maka :
(i) $2x = 0 + k \cdot 360^0$
$x = k \cdot 180^0$
$k = 0 \rightarrow x = 0 \cdot 180^0 = 0$
$k = 2 \rightarrow x = 2 \cdot 180^0 = 360^0$
$k = 1 \rightarrow x = 1 \cdot 180^0 = 180^0$
$k = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 180^0 = 540^0$
(tidak memenuhi)
(ii) $2x = 180^0 - 0 + k \cdot 360^0$
$2x = 180^0 + k \cdot 360^0$
$x = 90^0 + k \cdot 180^0$
$k = 0 \rightarrow x = 90^0 + 0 \cdot 180^0 = 90^0$
$k = 1 \rightarrow x = 90^0 + 1 \cdot 180^0 = 270^0$
$k = 2 \rightarrow x = 90^0 + 2 \cdot 180^0 = 450^0$ (tidak memenuhi)
Jadi Hp adalah = $\{0^0, 30^0, 90^0, 150^0, 180^0, 210^0, 270^0, 330^0, 360^0\}$

c. Cos 4x – Cos 2x = 0

↔ Cos (3x + x) – Cos (3x – x) = 0
↔ -2 Sin 3x Sin x = 0
↔ Sin 3x = 0 atau Sin x = 0
Untuk Sin 3x = 0 ↔ Sin 3x = Sin 0 maka :
(i) $3x = 0^0 + k \cdot 360^0$
$x = 0^0 + k \cdot 120^0$
$k = 0 \rightarrow x = 0^0 + 0 \cdot 120^0 = 0$
$k = 1 \rightarrow x = 0^0 + 1 \cdot 120^0 = 120^0$
$k = 2 \rightarrow x = 0^0 + 2 \cdot 120^0 = 240^0$
$k = 3 \rightarrow x = 0^0 + 3 \cdot 120^0 = 360^0$
$k = 4 \rightarrow x = 0^0 + 4 \cdot 120^0 = 480^0$
(tidak memenuhi)
(ii) $3x = 180^0 - 0 + k \cdot 360^0$
$3x = 180^0 + k \cdot 360^0$
$x = 60^0 + k \cdot 120^0$
$k = 0 \rightarrow x = 60^0 + 0 \cdot 120^0 = 60^0$
$k = 1 \rightarrow x = 60^0 + 1 \cdot 120^0 = 180^0$
$k = 2 \rightarrow x = 60^0 + 2 \cdot 120^0 = 300^0$

$k = 3 \rightarrow x = 60^0 + 3 \, . \, 120^0 = 420^0$ (tidak memenuhi)

Untuk $\text{Sin } x = 0 \leftrightarrow \text{Sin } x = \text{Sin } 0^0$ maka :

(i) $x = 0^0 \; k \, . \, 360^0$

$k = 0 \rightarrow x = 0^0 + 0 \, . \, 360^0 = 0^0$

$k = 1 \rightarrow x = 0^0 + 1 \, . \, 360^0 = 360^0$

$k = 2 \rightarrow x = 0^0 + 2 \, . \, 360^0 = 720^0$ (tidak memenuhi)

(ii) $x = 180^0 - 0^0 + k \, . \, 360^0$

$x = 180^0 + k \, . \, 360^0$

$k = 0 \rightarrow x = 180^0 + 0 \, . \, 360^0 = 180^0$

$k = 1 \rightarrow x = 180^0 + 1 \, . \, 360^0 = 540^0$ (tidak memenuhi)

Jadi Hp = $\{0^0, 60^0, 120^0, 180^0, 240^0, 300^0, 360^0\}$

5. Persamaan kwadrat dalam Sin, Cos, Tan.

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri kuadrat dengan cara

- ✓ membuat pemisalan dan diselesaikan seperti mencari persamaan kuadra untuk mendapatkan akar-akar penyelesaian.
- ✓ Setelah mendapatkan akar penyelesaian direlasikan dengan trigonometrinya

Contoh :

1. Tentukan Hp dari persamaan $Sin^2x + Sin\ x\text{-}2 = 0$ untuk $0 \leq x \leq 360^0$!

   Jawab :

   $Sin^2x + Sin\ x\text{-}2 = 0$

   Misal Sin x = p maka :

   $\text{Sin}^2x + \text{Sin } x - 2 = p^2 + p - 2 = 0$

   $p^2 + p - 2 = 0$

   $(p + 2)\ (p - 1) = 0$

   $p + 2 = 0$ atau $p - 1 = 0$

   $p = -2 \quad p = 1$

   $p = -2$ Sin x = -2 (tidak mungkin, karena $\text{Sin } x \leq -1$)

   $p = 1$

   Sin x = 1

   Sin x = Sin 90^0 maka :

   (i) $x = 90^0 + k \, . \, 360^0$

$k = 0 \rightarrow x = 90^0 + 0 \cdot 360^0 = 90^0$
$k = 1 \rightarrow x = 90^0 + 1 \cdot 360^0 = 450^0$ (tidak memenuhi)
(ii) $x = 180^0 - 90^0 + k \cdot 360^0$
$k = 0 \rightarrow x = 90^0 + k \cdot 360^0 = 90^0$ (sama dengan (i))
Jadi Hp = $\{90^0)$

2. Tentukan Hp dari persamaan $2\sin^2 x - 6\sin x + 4 = 0$ untuk $0 \leq x \leq 360^0$!

$2\sin^2 x - 6\sin x + 4 = 0$
$(2\sin x - 2)(\sin x - 2) = 0$
$2\sin x - 2 = 0$ atau $\sin x - 2 = 0$
$\sin x = 1$ $\quad\quad$ $\sin x = 2$ (tidak memenuhi)
untuk $\sin x = 1$
$\sin x = \sin 90^0$
(i). $x = 90 + k.360^0$
$k=0 \rightarrow x = 90^0$
$k=1 \rightarrow x = 450^0$ (tidak memenuhi)
(ii). $x = (180 - 90)^0 + k.\ 360^0$
$x = 90 + k.360^0$
$k=0 \rightarrow x = 90^0$
$k=1 \rightarrow x = 450^0$ (tidak memenuhi)
Jadi Hp: $\{ 90^0 \}$

B. PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

b. Cara menggunakan pertidaksamaan trigonometri

- ✓ mencari harga nol, dengan cara menyelesaikan persamaan trigonometri
- ✓ himpunan penyelesaian menggunakan garis bilangan

Contoh:

1. Selesaikan $\sin 2x < \cos x$ untuk $0 \le x \le 360°$

Cara:

$\sin 2x - \cos x < 0$

$2 \sin x.\cos x - \cos x < 0$

$\cos x.(2 \sin x - 1) < 0$

harga nol:

- $\cos x = 0$

  $\cos x = \cos 90°$

  $x = 90° + k.360°$ atau $x = -90° + k.360°$

  $k = 0 \rightarrow x = 90°$ $k = 1 \rightarrow x = 270°$

- $2 \sin x - 1 = 0$

  $2 \sin x = 1$

  $\sin x = ½$

  $\sin x = \sin 30°$

  $x = 30° + k.360°$ atau $x = (180 - 30)° + k.360°$

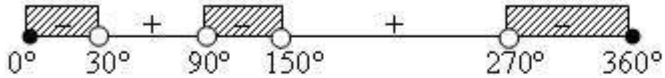
  $k = 0 \rightarrow x = 30°$ $x = 150° + k.360°$

  $k = 0 \rightarrow x = 150°$

Memberi tanda (+) dan (-) pada garis bilangan:

Jika $x = 180°$ maka $\sin 2.180° - \cos 180° = \sin 360° - \cos 180° = 0 - (-1) = 1$ (+)

Jadi garis bilangannya:



karena yang diminta kurang dari (<) 0, maka yang diarsir adalah bagian-bagian yang bertanda (-)

Sehingga HP-nya: $\{0° \le x < 30°$ atau $90° < x < 150°$ atau $270° < x \le 360°\}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut, dengan $0^0 \leq x \leq 360^0$

$\sin x + 1 \geq \cos x$

Penyelesaian :

$\sin x + 1 - \cos x \geq 0$

$\sin x - \cos x + 1 = 0$

$\sin x + 1 = \cos x$

$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = \cos^2 x$

$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$

$2 \sin^2 x + 2 \sin x = 0$

$2 \sin x (\sin x + 1) = 0$

$2 \sin x = 0 \quad V \quad \sin x = -1$

$\sin x = 0 \qquad x = 270^0 + k \,.\, 360^0$

kuadran I

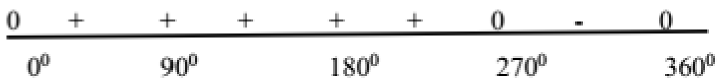
$\sin x = \sin (0^0 + k \,.\, 360^0)$

$x = 0^0 + k \,.\, 360^0$

kuadran II

$\sin x = \sin (180^0 + k \,.\, 360^0)$

$x = 180^0 + k \,.\, 360^0$



$x = 0^0$, $\sin 0^0 + 1 - \cos 0^0$ hasilnya nol

$x = 90^0$, $\sin 90^0 + 1 - \cos 90^0$ hasilnya positif

$x = 180^0$, $\sin 180^0 + 1 - \cos 180^0$ hasilnya positif

$x = 270^0$, $\sin 270^0 + 1 - \cos 270^0$ hasilnya nol

$x = 300^0$, $\sin 300^0 + 1 - \cos 300^0$ hasilnya negatif

$x = 360^0$, $\sin 360^0 + 1 - \cos 360^0$ hasilnya nol

Jadi, $Hp = \{ x \mid 0^0 < x < 270^0 \}$

DAFTAR PUSTAKA

Kariadinata, Rahayu.2013. Trigonometri Dasar.Bandung: Pustaka Setia

Kristanto, Y. D. (2016). Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/MA Kelas X. Jakarta: Grasindo

Martthen Kanginan dan Kustendi, T. 2001. Matematika untuk SMU Kelas 3 Jilid 2A. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Mega Teguh W. 2004. Trigonometri. Jakarta: Bagian Proyek Pengembangan Kurikulum Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan, Direktorat Jendral Pendidikan Dasar dan Menengah. Departemen Pendidikan Nasional.

Mubiin, S.K., 2020 Bahan ajar Trigonometri. https://files1.simpkb.id/guruberbagi/rpp/129038-1600876023.pdf. Diakses tanggal 20 desember 2020

Sartono Wirodikromo. 2000. Matematika 2000 untuk SMU Jilid 7 Kelas 3. Jakarta: PT Erlangga.

Sumardyono. 2018. Trigonometri. Online. https://nanopdf.com/download/file-735_pdf#. Diakses tanggal 10 juli 2019

Wirodikromo, s. 2004. Matematika SMA Kelas X. Bandung: Erlangga

Zen, Fathurin.2018. Trigonometri.Bandung: Alfabeta