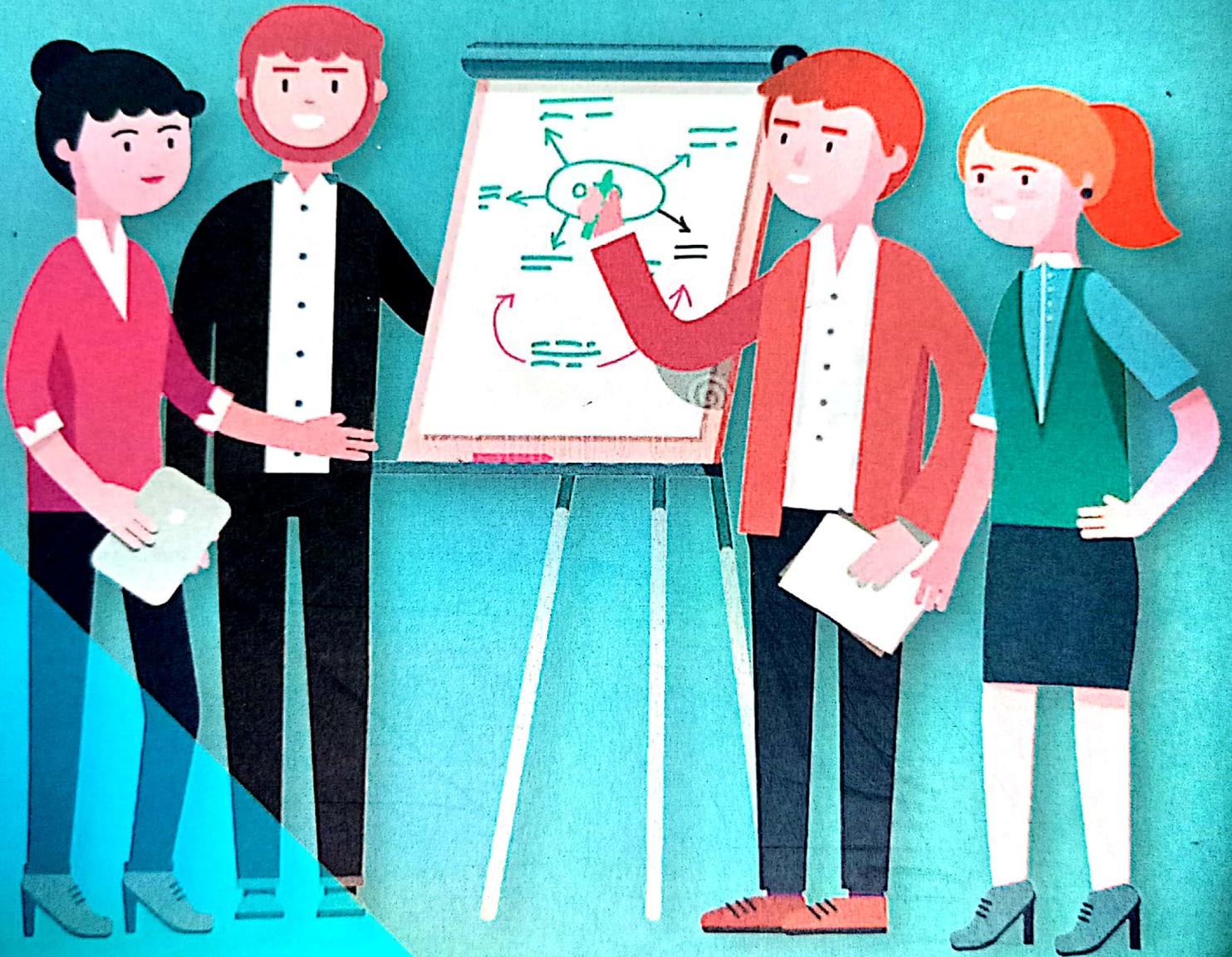


MODEL

REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING

(Model Pembelajaran untuk Diterapkan pada Mahasiswa)



Dr. Syarifatul Maf'ulah, M.Pd
Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si



MODEL

REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING

(Model Pembelajaran untuk Diterapkan pada Mahasiswa)

Dr. Syarifatul Maf'ulah, M.Pd
Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si





Judul:

MODEL REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING
(Model Pembelajaran untuk Diterapkan pada
Mahasiswa)

Penulis:

Dr. Syarifatul Maf'ulah, M.Pd
Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si

ISBN 978-602-5715-66-2

Editor:

M. Syaifuddin S., M.A
Ashlihah, S.E., M.A

Penyunting:

Wening Puspowati

Desain sampul dan tata letak

Erhaka Art

Penerbit:



Erhaka Utama



Redaksi:

Pogung baru Blok F28 Sleman-Yogyakarta
0814-5606-0279 | www.erhakautama.com

Distributor tunggal:

CV. Lima Aksara | Pratama Residence Kav C23/B19
Plosogeneg-Jombang | 0857-4666-6795 |
IG@erhakautama | @bookterrace | @broden_taraka |
Fb erhaka utama Yogyakarta

Cetakan pertama Desember 2020

Hak cipta dilindungi undang-undang. Plagiarisme menjadi tanggungjawab penulis sepenuhnya. Dilarang memperbanyak isi buku ini, baik sebagian maupun seluruhnya dalam bentuk apapun tanpa izin tertulis dari Penerbit.

Pengantar

Alhamdulillah, puji syukur atas segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini dengan judul “MODEL *REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING*”. Penulisan buku ini bertujuan untuk menyampaikan kepada para pembaca, khususnya para pendidik, bahwa terdapat suatu model pembelajaran yang bisa digunakan untuk meningkatkan kemampuan berpikir *reversible* peserta didik dan kemampuan mereka dalam pemecahan masalah matematika. Model tersebut adalah model *Reversible Problem based Learning*. Model ini dirancang untuk diterapkan pada peserta didik level Perguruan Tinggi (dalam hal ini adalah mahasiswa).

Model ini dikembangkan sendiri oleh penulis melalui penelitian pengembangan selama dua tahun berturut-turut. Penelitian pengembangan yang telah dilakukan oleh penulis merupakan hibah Pascadoktor yang didanai oleh KEMENRISTEK/BRIN pada tahun 2019 dan 2020. Oleh karena itu penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada KEMENRISTEK/BRIN yang telah mendanai penelitian pengembangan model ini sekaligus penerbitan buku ini. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada Rektor Universitas Negeri Surabaya dan Ketua STKIP PGRI Jombang yang telah memberikan motivasi kepada penulis sehingga penelitian pengembangan dan penyusunan buku ini bisa diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penelitian pengembangan model dan penyusunan buku ini.

Penulis menyadari jika didalam penyusunan buku ini mempunyai kekurangan, namun penulis meyakini sepenuhnya bahwa sekecil apapun buku ini tetap akan memberikan sebuah manfaat bagi pembaca. Akhir kata, semoga buku ini dapat bermanfaat dan menggugah rasa ingin menerapkan model *Reversible Problem based Learning*.

Penulis

Daftar Isi

Bab I Latar Belakang Pengembangan Model | 1

Bab II Kajian Teori yang Mendukung Model *Reversible Problem Based Learning* | 11

A. Teori Belajar | 11

1. Teori Belajar Behavioristik | 15

2. Teori Belajar Konstruktivisme | 17

B. Kemampuan Berpikir Reversible | 25

C. Model Pembelajaran | 30

D. Teori Pengembangan Model Pembelajaran | 37

Bab III Model *Reversible Problem Based Learning* | 39

1. Sintaks | 40

2. Sistem Sosial Model *Reversible Problem based Learning* |
46

3. System Reaksi | 48

4. System Pendukung | 51

Bab IV Contoh Perangkat Model *Reversible Problem Based Learning*

1. Satuan Acara Perkuliahan (SAP) | 56

2. Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) | 60

Daftar Pustaka | 67

Lampiran 1: Tampilan SAP secara lengkap | 72

Lampiran 2: Tampilan LKM secara lengkap | 74

Lampiran 3: Bentuk instrument Tes Berpikir *Reversible* | 78

1

LATAR BELAKANG

Berpikir selalu menjadi pusat perhatian dalam penelitian bidang pendidikan dan salah satu jenis berpikir yang perlu diperhatikan adalah berpikir *reversible*. Beberapa alasan penting mengapa berpikir *reversible* harus dimiliki oleh mahasiswa calon guru matematika yaitu: (1) berpikir *reversible* merupakan kemampuan mental yang mengharuskan bernalar dalam dua arah berbeda, membuat hubungan dua arah antar konsep, prinsip, dan prosedur sehingga memperkuat skema. (2) Melalui berpikir *reversible*, seseorang dapat melihat hal-hal dari beberapa perspektif berbeda sehingga dapat membantu dalam memecahkan masalah kompleks dengan melihat semua kondisi dari berbagai arah berbeda. (3) Berpikir *reversible* menuntut seseorang berpikir dua kali, yaitu dari sudut pandang yang berlawanan atau berbeda arah, sehingga mengurangi peluang seseorang akan melakukan kesalahan dalam setiap pengambilan keputusan. (4) Berpikir *reversible* dapat melatih kemampuan berpikir tingkat tinggi sehingga membawa dampak meningkatnya berpikir kreatif. Berdasarkan alasan tersebut, berpikir *reversible* mulai menjadi perhatian di dunia pendidikan matematika (Flanders, 2014).

Kenyataannya, (1) masih sedikit peneliti dan pendidik yang mengkaji tentang berpikir *reversible*. Hal tersebut didasarkan pada penelusuran tim peneliti pada jurnal-jurnal pendidikan, baik jurnal nasional maupun

internasional. (2) Guru masih mengabaikan berpikir *reversible* siswa. Hal ini didasarkan pada hasil observasi tim peneliti di lapangan, selama pembelajaran matematika, guru tidak melatih siswa berpikir *reversible* dan tidak memberikan masalah matematika yang mengarah agar siswa berpikir *reversible*. Bisa jadi hal ini disebabkan dua hal, yaitu; guru kurang memahami pentingnya berpikir *reversible* dan selama menjadi mahasiswa calon guru, mereka tidak dilatih untuk berpikir *reversible*. (3) Berdasarkan penelitian awal yang dilakukan oleh tim peneliti, mahasiswa calon guru matematika masih bermasalah terhadap kemampuan berpikir *reversible* mereka. (4) Belum ditemukannya model pembelajaran khusus yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir *reversible* mahasiswa calon guru matematika.

Penelitian awal yang telah dilakukan oleh tim penulis adalah dengan memberikan tes kepada mahasiswa calon guru matematika. Terdapat dua jenis tes yang masing-masing berisi sebuah masalah matematika yang saling berkebalikan. Masalah berupa soal cerita. Kedua masalah mempunyai alur cerita yang sama, hanya saja yang diketahui dan yang ditanyakan sengaja dibalik untuk mengetahui sejauh mana berpikir *reversible* mereka dalam menyelesaikan masalah matematika asuransi. Kedua tes tersebut disajikan pada Tabel 1.1 berikut.

Tabel 1.1: Tes pertama dan kedua tentang masalah matematika asuransi

Tes pertama	Tes kedua yang diberikan setelah subjek menyelesaikan tes pertama
Selesaikan soal berikut dengan menuliskan proses penyelesaiannya! Adi menabung uang di suatu bank di Indonesia. Bank	Selesaikan soal berikut dengan menuliskan proses penyelesaiannya! Adi menabung sebesar Rp 1.000.000,00 di suatu bank di

<p>memberikan bunga 10% per tahun dengan jenis bunga adalah bunga majemuk. Jika bunga tidak pernah diambil dan dianggap tidak ada biaya administrasi bank. Jika jumlah bunga yang mengendap selama 3 (tiga) tahun adalah Rp 331.000,00. Tentukan banyak uang yang ditabung Adi?"</p>	<p>Indonesia. Bank memberikan bunga 10% per tahun dengan jenis bunga adalah bunga majemuk. Bunga tidak pernah diambil dan dianggap tidak ada biaya administrasi bank. Tentukan jumlah bunga yang mengendap selama 3 (tiga) tahun!"</p>
--	--

Hasil pekerjaan mahasiswa menunjukkan bahwa untuk tes pertama, tidak ada satupun mahasiswa yang menjawab dengan benar. Tes pertama merupakan tes yang terkait dengan invers. Sedangkan untuk tes kedua, semua mahasiswa menjawab dengan benar. Ini berarti, ketika mahasiswa diberikan soal yang terkait invers, mereka kesulitan menyelesaikan soal tersebut. Hal tersebut terbukti dari hasil pekerjaan subjek pada Tes pertama, dimana semua mahasiswa tidak dapat menyelesaikan soal yang terkait dengan invers secara benar. Hal ini juga didukung oleh hasil penelitian Mafulah, Juniati, & Siswono (2016), namun penelitian tersebut untuk siswa Sekolah Dasar, hasilnya menunjukkan bahwa siswa Sekolah Dasar masih kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan invers (atau soal-soal yang melibatkan reversibilitas mereka).

Kebanyakan hasil pekerjaan mahasiswa untuk tes pertama adalah seperti pada Gambar 1.1 berikut.

Diketahui : $b = 10\%$
 $n = 3$ tahun
 $N_a = \text{Rp } 331.000$
 Ditanya : $x = ?$

$N_a = x(1+b)^n$
 $331.000 = x(1+0,10)^3$
 $331.000 = x(1,10)^3$
 $\frac{331.000}{(1,10)^3} = x$
 $\frac{331.000}{1,331} = x$
 $248.625,199 = x$
 $248.625,20 = x$

Seharusnya $331.000 + x$

... Jadi, banyak uang yang disimpan di bank adalah $\text{Rp } 248.625$

Salah

$3 \overline{) 331.000}$
 $110.333 \cdot$
 $\frac{110.333}{110.333}$
 $= 110.333$
 $\text{Rp } 1.103.330$

Seharusnya bunga 331.000 tidak dibagi 3 karena jenis bunga majemuk

$N_a = x(1+b)^n$
 $= 1.103.330(1+0,1)^3$
 $= 1.103.330(1,1)^3$
 $= 1.103.330 \cdot 1,331$
 $= 1.468.532,23$

Jadi banyak uang yang disimpan di bank adalah $\text{Rp } 1.468.532,23 - 331.000$
 $= \text{Rp } 1.137.532,23$

Gambar 1.1. Contoh Hasil Pekerjaan Mahasiswa untuk Tes Pertama

Sedangkan hasil pekerjaan mahasiswa untuk tes kedua seluruhnya seperti pada Gambar 1.2 berikut.

<p>Jawab:</p> $B_1 = M \cdot b$ $= 1.000.000 \cdot \frac{10}{100}$ $= 100.000$ $M + B_1 = 1.000.000 + 100.000$ $= 1.100.000$ $B_2 = (M + B_1) \cdot b$ $= 1.100.000 \cdot \frac{10}{100}$ $= 110.000$ $M + B_1 + B_2 = 1.100.000 + 110.000$ $= 1.210.000$ $B_3 = (M + B_1 + B_2) \cdot b$ $= 1.210.000 \cdot \frac{10}{100}$ $= 121.000$ $\text{Total bunga} = B_1 + B_2 + B_3$ $= 100.000 + 110.000$ $= 331.000$	$= 1.000.000 (1 + 0,1)^3$ $= 1.000.000 (1,1)^3$ $= 1.000.000 (1,331)$ $= 1.331.000$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Menggunakan formula $Na = x(1 + b)^t$ </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block; margin: 5px;"> 331.000 </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> Berdasarkan hasil wawancara, diperoleh bahwa itu berasal dari $1.331.000 - 1.000.000$ </div>
---	--

Gambar 1.2. Salah Satu Hasil Pekerjaan Mahasiswa untuk Tes Kedua

Penelitian awal selanjutnya adalah memberikan tes yang berisi masalah-masalah yang saling berkebalikan materi kalkulus.

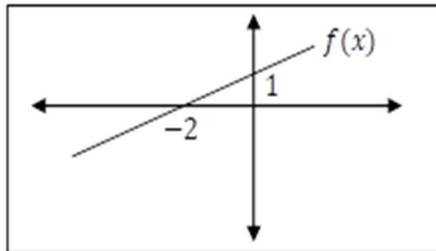
Adapun tes yang diberikan kepada mahasiswa bisa dilihat pada Gambar 1.3 berikut

TES

(waktu maksimal 15 menit)

Petunjuk: Selesaikan soal-soal berikut dengan jelas!

1. Jika $f(x) = 3x - 2$ dengan $x \in R$ maka gambarkan grafik fungsinya !
2. Perhatikan garfik berikut!

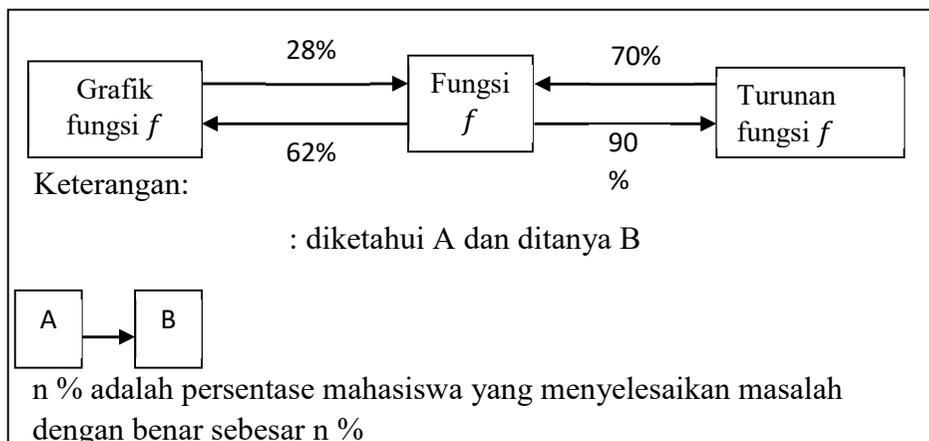


Tentukan fungsi $f(x)$ dari grafik tersebut!

Gambar 1.3. Tes Materi Kalkulus

Tes dirancang seperti pada Gambar 1.3 dengan tujuan agar dapat mengungkap kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah-masalah fungsi yang saling berkebalikan. Biasanya mahasiswa diminta untuk menggambar grafik dengan diketahui fungsi. Tapi melalui soal ini, mahasiswa juga diminta menentukan fungsi dari grafik yang diberikan. Biasanya mahasiswa diminta untuk menentukan turunan atau integral dari suatu fungsi. Tapi melalui soal ini, mahasiswa diminta untuk menentukan integral dari turunan suatu fungsi. Soal ini memang dirancang agar mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal yang berkebalikan dari yang biasa dikerjakan mahasiswa untuk mengetahui bagaimana kemampuan mahasiswa dalam membangun hubungan dua arah yang *reversible*.

Tes diberikan kepada mahasiswa calon guru sebanyak 105 orang. Hasil tes ditampilkan seperti pada Gambar 1.4 berikut.



Gambar 1.4. Gambaran Hasil Tes Kalkulus

Oleh sebab itu tim penulis mengembangkan suatu model pembelajaran, yaitu model *Reversible Problem based Learning* yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir *reversible* mahasiswa. Subjek dalam hal ini mahasiswa calon guru matematika, salah satu manfaat bagi mereka adalah agar mereka dapat mengembangkan kemampuan berpikir *reversible* siswa secara maksimal ketika mereka sudah menjadi guru nantinya.

2

KAJIAN TEORI YANG MENDUKUNG MODEL REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING

A. Teori Belajar

Model *Reversible Problem based Learning* dikembangkan oleh penulis tentunya didasarkan pada teori-teori belajar. Oleh karena itu, penulis terlebih dulu memaparkan tentang teori-teori belajar yang mendukung terbentuknya model. Teori-teori belajar tersebut disajikan sebagai berikut.

1. Teori Belajar Behavioristik

Behavioristik merupakan aliran dalam pemahaman tingkah laku manusia yang dikembangkan oleh John B. Watson, seorang ahli psikologi yang kemudian diikuti oleh teoritikus lainnya seperti Thorndike dan Skinner. Menurut teori behavioristik, belajar adalah perubahan tingkah laku sebagai akibat dari adanya interaksi antara stimulus dan respon. Dengan kata lain belajar adalah bentuk perubahan yang dialami siswa dalam hal kemampuannya untuk bertingkah laku dengan cara yang baru sebagai hasil interaksi antara stimulus dan respon. Seseorang telah dianggap belajar sesuatu jika ia dapat menunjukkan perubahan tingkah lakunya. Dua tokoh yang menganut aliran ini adalah Thorndike dan Skinner.

a. Teori belajar menurut Thorndike

Burhanudin (2008) menjelaskan tentang teori belajar menurut Thorndike, Throndike adalah psikolog Amerika yang pertama kali mengadakan eksperimen mengenai hubungan S-R (stimulus-respon). Diawali dengan teori *trial and error* (mencoba-coba) artinya belajar sebagai kegiatan yang dilakukan dengan mencoba-coba. Karena dengan mencoba-coba, seseorang atau organisme dapat menemukan respon yang dianggapnya cocok dalam menghadapi kondisi yang baru. Hal tersebut diperkuat Throndike dengan melakukan eksperimen melalui binatang kucing sebagai berikut.

Kucing yang lapar diletakkan di dalam *puzzle box* (kotak) yang dilengkapi alat pembuka jika ditekan. Di luar kotak kerangkeng ditaruh daging. Kucing yang di dalam kerangkeng bergerak kesana kemari mencari jalan untuk keluar, tetapi gagal. Hal tersebut berulang terus menerus. Pada suatu ketika tanpa disengaja, kucing tersebut menekan sebuah tombol sehingga pintu kotak kerangkengpun terbukadan kucing dapat memakan daging yang ada di depannya. Percobaan Throndike tersebut diulang-ulang dan pola gerakan kucing sama saja. Namun makin lama kucing dapat membuka pintunya dengan gerakan usahanya yang makin sedikit dan efisien. Kucing tersebut terlihat ada kemajuan-kemajuan tingkah lakunya. Dan pada akhirnya ketika kucing dimasukkan ke dalam *box puzzle* dengan daging diluar box, maka kucing tersebut langsung dapat membuka *box* dengan sekali usaha.

Berdasarkan percobaan tersebut, Throndike menyimpulkan bahwa perilaku belajar manusia

ditentukan oleh stimulus yang ada di lingkungan sehingga menimbulkan respon secara refleks. Stimulus yang terjadi setelah sebuah perilaku terjadi akan mempengaruhi perilaku selanjutnya. Sehingga Thordike (dalam Moreno, 2010) mengembangkan hukum-hukum belajar sebagai berikut:

- a) *Law of effect* (hukum akibat), yang berarti: “jika sebuah tindakan diikuti oleh perubahan yang memuaskan dalam lingkungan, maka kemungkinan tindakan itu akan diulang kembali akan semakin meningkat. Sebaliknya, jika sebuah tindakan diikuti oleh perubahan yang tidak memuaskan, maka tindakan tersebut mungkin akan menurun atau tidak dilakukan sama sekali”
 - b) *Law of readiness* (hukum kesiapan), yang berarti dalam belajar seseorang harus dalam keadaan siap baik fisik maupun psikisnya agar mendapatkan hasil belajar yang memuaskan.
 - c) *Law of exercise* (hukum latihan), yaitu tindakan yang dilakukan berulang-ulang dalam belajar merupakan suatu bentuk eksistensi agar seseorang dapat mentransfer ilmu yang didapat dari *short time memory* ke *long time memory* agar tidak hilang dari benaknya.
- b. Teori belajar menurut Skinner
- Skinner mengemukakan bahwa belajar merupakan perubahan perilaku. Menurut Sagala (2009), prinsip yang terpenting pada teori ini adalah bahwa: perilaku berubah sesuai dengan konsekuensi-konsekuensi langsung dari perilaku tersebut. Konsekuensi yang menyenangkan akan

memperkuat perilaku, sedangkan konsekuensi-konsekuensi yang tidak menyenangkan akan memperlemah perilaku. Dengan kata lain konsekuensi-konsekuensi yang menyenangkan akan meningkatkan frekuensi seseorang untuk melakukan perilaku yang serupa. Konsekuensi yang menyenangkan sama dengan *reinforcement*. Konsekuensi yang tidak menyenangkan sama dengan *punishment*. Penggunaan konsekuensi-konsekuensi yang menyenangkan dan tidak menyenangkan untuk mengubah perilaku seseorang disebut *operant conditioning* atau pengkondisian operan (Baharudin dan Wahyuni, 2008). Tujuan adanya konsekuensi2 tersebut adalah untuk mengubah perilaku. Sehingga dengan diberikannya konsekuensi2 sesegera mungkin akan lebih baik, karena akan berdampak positif terhadap perilaku selanjutnya. Jadi pemberian konsekuensi dalam pembelajaran itu penting supaya kesalahan yang sama tidak dilakukan lagi oleh para siswa.

2. Teori Belajar Konstruktivisme

Konstruktivisme merupakan pandangan filsafat yang pertama kali dikemukakan oleh sejarawan Italia yang bernama Giambatista pada tahun 1710. Konstruktivisme adalah teori perkembangan kognitif yang menekankan pada peran aktif siswa dalam membangun pemahaman mereka sendiri tentang pengetahuan yang dipelajarinya. Slavin (2000) mengungkapkan jika konstruktivisme dalam sejarah Pendidikan lahir dari gagasan-gagasan Piaget dan Vygotsky.

a. Teori belajar menurut Piaget

Piaget (dalam Dimiyati dan Mudjiono, 2002) berpendapat bahwa pengetahuan dibentuk oleh individu. Sebab individu melakukan interaksi secara terus menerus dengan lingkungan. Sedangkan lingkungan tersebut selalu mengalami perubahan. Sehingga dengan adanya interaksi dengan lingkungan maka kognitif semakin berkembang.

Menurut Piaget, pada saat individu belajar sebenarnya telah terjadi dua proses, yaitu proses organisasi informasi dan proses adaptasi. Proses Organisasi Informasi adalah proses menghubungkan informasi yang diterimanya dengan struktur-struktur pengetahuan yang sudah disimpan atau sudah ada sebelumnya di otak. Sedangkan proses adaptasi berisi dua kegiatan, yaitu: asimilasi dan akomodasi. Asimilasi adalah proses penyerapan skema baru yang berupa informasi dari luar, dimana skema baru tersebut sesuai atau cocok dengan dengan skema lama. Akomodasi adalah proses mengubah skema lama yang dimiliki oleh individu karena skema lama tidak sesuai dengan skema baru. Dengan adanya asimilasi dan akomodasi sehingga terjadi keseimbangan (*equilibrium*) antara faktor2 internal dan eksternal. Jika hanya terjadi asimilasi secara kontinu, maka yang bersangkutan hanya memiliki beberapa skemata global dan ia tidak mampu melihat perbedaan antara berbagai hal. Sebaliknya, jika hanya akomodasi saja yang terjadi secara kontinu, maka individu akan hanya memiliki skemata yang kecil-kecil saja dan mereka tidak mempunyai

skemata yang umum. Individu tersebut tidak bisa melihat persamaan2 diberbagai hal.

Proses adaptasi manusia dalam menghadapi pengetahuan baru juga ditentukan oleh tahap perkembangan kognitifnya. Piaget membagi perkembangan kognitif manusia ke dalam empat tahap yang disajikan Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 : Tahap- tahap Perkembangan Kognitif Piaget

Tahap	Usia	Kemampuan Utama
Sensorimotor	Lahir sampai 2 tahun	Bayi mengenali lingkungan dengan kemampuan sensorik dan motorik. Bayi bergerak dengan tindakan refleks instingtif. Bayi membangun pemahaman tentang dunia melalui tindakan fisik. Artinya bayi mengenal lingkungan dengan tindakan fisik. Misalnya: melihat, mencium, mendengar, meraba dan bergerak2. Tingkah laku anak bersifat motorik dan anak menggunakan sistem penginderaan untuk mengenal lingkungannya untuk mengenal obyek
Praoperasional	2 sampai 7 tahun	Perkembangan kemampuan menggunakan simbol2 dengan bahasa/kata2, konsep sederhana, dan menggambar dalam mempresentasikan dunia. Kata2, konsep sederhana dan gambar menunjukkan adanya peningkatan pemikiran

		simbolis dan melampaui hubungan informasi sensor dan tindakan fisik
Operasi Konkret	7 sampai 11 tahun	Anak mulai dapat mengembangkan pikiran secara logis mengenai peristiwa2 konkret dan mengklasifikasikan benda2 ke dalam bentuk2 yang berbeda
Formal Operasional	11 tahun sampai dewasa	Sudah mulai berpikir abstrak dan logis

Menurut Piaget, perkembangan kognitif sebagian besar bergantung kepada seberapa jauh anak aktif memanipulasi dan aktif berinteraksi dengan lingkungannya.

b. Teori belajar menurut Vygotsky

Vygotsky berpendapat bahwa siswa membentuk pengetahuan sebagai hasil pikiran dan kegiatan siswa sendiri melalui bahasa. Karena perkembangan kognitif manusia berkaitan erat dengan perkembangan bahasanya. Bahasa merupakan kekuatan bagi perkembangan mental manusia. Vygotsky lebih menekankan aspek sosial/ pentingnya peran interaksi sosial bagi perkembangan belajar seseorang. Siswa sebaiknya belajar melalui interaksi dengan orang dewasa dan teman sebaya yang lebih mampu. Interaksi sosial ini memacu terbentuknya ide baru dan memperkaya perkembangan intelektual siswa.

Vygotsky mengatakan bahwa belajar dimulai ketika seorang anak dalam perkembangan *Zone of Proximal Development* (Zona perkembangan terdekat). Zona perkembangan terdekat siswa adalah tingkat perkembangan sedikit di atas tingkat perkembangan siswa saat ini atau jarak antara tingkat perkembangan aktual dengan tingkat perkembangan potensial atau perkembangan kemampuan siswa sedikit di atas kemampuan yang sudah dimilikinya. Tingkat perkembangan aktual adalah pemfungsian intelektual individu saat ini dan kemampuan untuk belajar sesuatu dengan kemampuannya sendiri. Tingkat perkembangan potensial adalah tingkat yang dapat dicapai seorang individu dengan bantuan orang lain seperti guru, orang tua, atau teman sebaya yang berkemampuan lebih tinggi. Pada saat siswa bekerja di dalam daerah perkembangan terdekat mereka, tugas-tugas yang tidak dapat mereka selesaikan sendiri, akan dapat mereka selesaikan dengan bantuan teman sebaya atau orang dewasa yang mempunyai kemampuan di atas mereka.

Vygotsky juga menghasilkan teori Scaffolding, yang maknanya diuraikan sebagai berikut.

1. Memberikan dukungan dan bantuan kepada anak yang sedang pada awal belajar, kemudian sedikit demi sedikit mengurangi dukungan atau bantuan tersebut setelah anak mampu memecahkan masalah dari tugas yang dihadapinya.
2. Pemberian sejumlah besar bantuan oleh teman sebaya atau orang dewasa yang

berkompeten kepada anak, kemudian mengurangi bantuan tersebut dan memberikan kesempatan kepada anak tersebut mengambil alih tanggung jawab yang semakin besar setelah dapat melakukannya. Bantuan dapat berupa petunjuk, dorongan, peringatan, menguraikan masalah ke dalam langkah-langkah pemecahan, memberikan contoh, tindakan-tindakan lain yang memungkinkan siswa itu belajar mandiri.

3. Pemberian bantuan kepada anak selama tahap-tahap awal perkembangannya dan mengurangi bantuan tersebut dan memberikan kesempatan kepada anak untuk mengambil alih tanggung jawab yang semakin besar segera setelah anak dapat melakukannya.

B. Kemampuan Berpikir Reversible

Berpikir *reversible* merupakan istilah dalam psikologi kognitif yang pertama kali dikemukakan oleh Piaget ketika meneliti ketiga putrinya. Menurut Piaget (Inhelder&Piaget,1958), berpikir *reversible* adalah kemampuan mental seseorang untuk mengubah arah pemikirannya sehingga dapat kembali ke titik semula. Sedangkan Krutetskii (1976) mendefinisikan berpikir reversible dalam dua hal, yaitu; (1) berpikir *reversible* merupakan kemampuan membangun hubungan dua arah yang *reversible* sebagai lawan dari hubungan satu jalan yang berfungsi hanya pada satu arah saja; dan (2) berpikir *reversible* merupakan proses mental seseorang untuk kembali ke data awal setelah

memperoleh hasil. Menurut Krutetskii, pengertian yang kedua disebut juga sebagai proses mental sebagai penalaran. Jika proses *reversible* seseorang dalam pemecahan masalah melalui tahap A,B,C,D,E,F, maka untuk kembali ke data awal tidak harus melalui proses F,E,D,C,B,A, tetapi bisa melalui proses dari F dan menarik kesimpulan ke A.

Sejalan dengan Krutetskii pada pengertian pertama, Flanders (2014) juga berpendapat jika berpikir *reversible* merupakan kemampuan mental untuk membangun pemahaman prosedural dua arah yang *reversible (two-way process)* (Flanders, 2014). Sedangkan Kang & Lee (1999) sependapat dengan Krutetskii pada pengertian yang kedua, yaitu berpikir *reversible* sebagai proses mental seseorang untuk kembali ke data awal setelah memperoleh hasil. Jika dikaitkan dengan tahap pemecahan masalah menurut Polya, maka ini juga bisa disebut sebagai tahap looking back.

Selanjutnya Hackenberg (2010) menguraikan tentang makna dari reversibilitas yang dibedakan menjadi dua, yaitu inversi dan kompensasi sebagai berikut:

- a. makna pertama yaitu inversi, melibatkan pembatalan sebuah aksi mental untuk membalikkan situasi ke pernyataan awalnya.
- b. makna kedua yaitu kompensasi, melibatkan tampilan sebuah aksi yang menghasilkan sebuah keadaan ekuivalen ke keadaan awalnya.

Pada teori yang dikembangkan Piaget (Inhelder & Piaget, 1958), konsep berpikir reversible ada dua bentuk, yaitu bentuk negasi dan bentuk resiprositas. Bentuk negasi melibatkan pemahaman bahwa gerakan dalam satu arah dapat dibatalkan oleh

gerakan dalam arah yang berlawanan. Sedangkan bentuk resiprositas berkaitan dengan kompensasi atau hubungan-hubungan yang ekuivalen.

Menurut Adi (1978), Ramful (2009), dan Heckenberg (2010), berpikir *reversible* juga dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan inverse dan resiprositas. Berpikir *reversible* dengan inverse berarti berpikir *reversible* yang terkait dengan *invers* (jika lingkup masalahnya adalah aljabar). Sedangkan berpikir *reversible* dengan resiprositas berarti berpikir yang terkait dengan hubungan timbal balik atau keseimbangan, artinya seseorang tidak hanya mampu sampai ke tujuan yang ingin dicapai, tetapi juga mampu kembali ke titik awal.

Menurut Mafulah, Juniati, dan Siswono (2017), aspek-aspek berpikir *reversible* yang bisa diidentifikasi ada tiga aspek. (1) Aspek negasi, yaitu ketika subjek menggunakan *invers* terhadap operasi yang bersangkutan. (2) Aspek resiprositas, yaitu ketika subjek menggunakan kompensasi atau hubungan-hubungan yang ekuivalen. (3) Kemampuan mengembalikan ke data awal setelah memperoleh hasil.

Berdasarkan uraian tentang makna berpikir *reversible*, maka peneliti mendefinisikan berpikir *reversible* sebagai kemampuan seseorang dalam membangun hubungan dua arah yang *reversible*. Artinya, terdapat dua aktivitas mental dalam berpikir *reversible*, yaitu aktivitas *forward* dan aktivitas *reverse*. Aktivitas *forward* berarti proses yang dimulai dari titik awal menuju tujuan yang hendak dicapai. Sedangkan aktivitas *reverse* merupakan proses yang dimulai dari tujuan kembali lagi ke keadaan awal. Sedangkan berpikir *reversible* dapat dilakukan dengan dua cara,

yaitu inversi dan resiprositas. Inversi berarti terkait *invers* dan resiprositas terkait keseimbangan. Maka jika dikaitkan dengan makna berpikir *reversible*, *reverse* atau proses dari tujuan ke keadaan awal bisa dikatakan sebagai proses inversi, yaitu *invers* dari *forward*. Ketika *forward* dan *reverse* dilakukan, maka akan terjadi keseimbangan atau bisa dikatakan sebagai resiprositas. Berdasarkan ini, dapat dirumuskan cara yang dapat digunakan untuk mengungkap sekaligus melatih berpikir *reversible* mahasiswa. Yaitu dengan memberikan masalah-masalah yang *reversible*.

Masalah *reversible* adalah masalah yang terkait dengan *invers*. *Invers* yang dimaksud dalam hal ini tidak harus terkait dengan operasi. Contoh masalah *reversible* yang terkait dengan operasi adalah sebagai berikut.

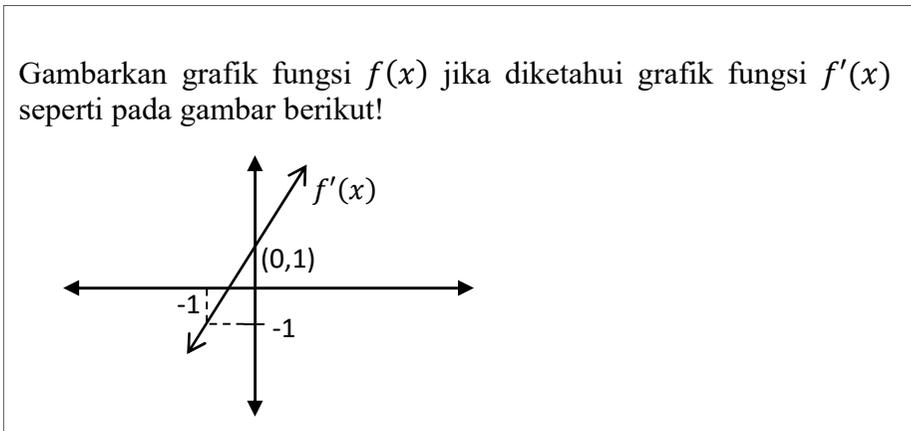
“Adi menabung uang di suatu bank di Indonesia. Bank memberikan bunga 10% per tahun dengan jenis bunga adalah bunga majemuk. Jika bunga tidak pernah diambil dan dianggap tidak ada biaya administrasi bank. Jika jumlah bunga yang mengendap selama 3 (tiga) tahun adalah Rp 331.000,00. Tentukan banyak uang yang ditabung Adi di awal?”

Masalah tersebut merupakan salah satu contoh masalah *reversible* yang terkait dengan *invers* suatu operasi. Penjelasananya adalah sebagai berikut.

Untuk menyelesaikan masalah di atas menggunakan formula $Na = x(1 + b)^n$ dimana x adalah simbol dari, Na adalah simbol dari besar uang akhir, yaitu besar tabungan awal ditambah dengan bunga yang mengendap selama n tahun, dan b adalah simbol dari besar bunga per tahun. Artinya, yang ditanyakan pada

masalah adalah $Na - x$, sehingga untuk menentukan besar uang yang ditabung di awal harus melibatkan *invers*.

Contoh masalah *reversible* yang melibatkan *invers* tapi bukan *invers* suatu operasi disajikan pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1. Contoh masalah *reversible*

Masalah pada Gambar 2.1 adalah salah contoh masalah *reversible* yang melibatkan *invers* tapi bukan *invers* suatu operasi. *Invers* yang dimaksud pada masalah ini adalah kebalikan dari turunan suatu fungsi, yaitu integralnya. Maka yang dimaksud *invers* atau kebalikan dari $f'(x)$ adalah $\int f'(x) dx$.

Untuk melatih kemampuan mahasiswa dalam membangun hubungan dua arah yang *reversible*, maka tim peneliti memberikan masalah-masalah yang *reversible*. Menurut Ramful (2015) “.....in the primal problem the source and relation are specified and the aim is to find the result. While in the dual problem the result and relation are specified and the aim is to find the source”. Dalam hal ini Ramful menggunakan istilah *primal problem* dan *dual problem*. Namun peneliti

menggunakan istilah masalah-masalah yang saling *reversible* atau berkebalikan jika (1) masalah pertama terkait *invers*, sedangkan masalah kedua tidak terkait *invers* atau sebaliknya tetapi kedua masalah dalam konteks yang sama. Atau (2) jika dilihat pada segi yang diketahui dan ditanyakan. Misal yang diketahui pada masalah pertama adalah A dan yang ditanyakan adalah B, maka yang diketahui pada masalah kedua adalah B dan yang ditanyakan adalah A.

Berdasarkan uraian di atas, maka seseorang dikatakan mempunyai kemampuan berpikir *reversible* jika memenuhi minimal satu indikator berikut.

1. Mampu menghubungkan dua konsep atau lebih secara dua arah yang *reversible*
2. Mampu menyelesaikan masalah-masalah yang *reversible*
3. Mampu melakukan *looking back* dalam proses pemecahan masalah. *Looking back* masuk pada kategori berpikir *reversible* jika yang dilakukan subjek adalah (1) mengecek kembali hasil / jawaban yang diperoleh kembali ke masalah awal atau (2) melakukan proses kembali ke data awal setelah melakukan penyelesaian masalah. Catatan: jika proses pemecahan masalah melalui tahap A,B,C,D,E,F, maka untuk kembali ke data awal tidak harus melalui proses F,E,D,C,B,A, bisa jadi F,D,E,B,C,A. Jika *looking back* dilakukan dengan cara menghitung ulang proses penyelesaian, maka hal itu bukan termasuk dalam kategori berpikir *reversible*.

C. Model Pembelajaran

Menurut Arends, Wenitzky, dan Tannenboum (2001), model pembelajaran mengacu pada pendekatan pembelajaran yang digunakan, termasuk di

dalamnya tujuan-tujuan pembelajaran, tahap-tahap dalam kegiatan pembelajaran, lingkungan pembelajaran dan pengelolaan kelas. Model pembelajaran mencakup suatu pendekatan pembelajaran yang luas dan menyeluruh, mempunyai empat ciri khusus yang tidak dimiliki oleh strategi atau prosedur tertentu, yaitu (a) rasional teoritik yang logis yang disusun oleh perancangannya, (b) landasan pemikiran tentang tujuan pembelajaran yang hendak dicapai dan bagaimana siswa belajar untuk mencapai tujuan tersebut, (c) aktivitas guru dan siswa yang diperlukan agar model tersebut dapat terlaksana dengan efektif, dan (d) lingkungan belajar yang diperlukan untuk mencapai tujuan pembelajaran.

Menurut Joyce, Weil, dan Calhoun (2009) model pembelajaran adalah suatu rencana atau pola yang dapat digunakan untuk membentuk kurikulum (rencana pembelajaran jangka panjang), merancang bahan-bahan pembelajaran, dan membimbing pembelajaran di kelas atau yang lain. Lebih lanjut mereka menjelaskan ciri-ciri model pembelajaran, diantaranya adalah; (a) model pembelajaran dibentuk berdasarkan teori pendidikan dan teori belajar; (b) mempunyai misi atau tujuan tertentu; (c) memiliki sintaks atau tahapan-tahapan kegiatan pembelajaran; (d) memiliki dampak pembelajaran.

Arends (2001) membagi model pembelajaran menjadi dua kelompok besar, yaitu model-model pembelajaran interaktif yang berpusat pada guru dan model-model pembelajaran interaktif yang berpusat pada siswa. Kelompok model-model pembelajaran interaktif yang berpusat pada guru adalah model pembelajaran presentasi, pengajaran langsung, dan pengajaran konsep. Kelompok model-model

pembelajaran interaktif yang berpusat pada siswa adalah model pembelajaran kooperatif, model pembelajaran berbasis masalah, serta model pembelajaran diskusi kelas. Berdasarkan uraian tersebut, maka model *Reversible Problem based Learning* masuk pada kategori model pembelajaran interaktif yang berpusat pada mahasiswa yang meningkatkan kemampuan berpikir *reversible*.

Pendapat Joyce, Weil, & Calhoun (2009: 9) dan menyatakan bahwa setiap model pembelajaran mempunyai empat komponen, yaitu sebagai berikut.

1. Sintaks

Sintaks merupakan urutan langkah kegiatan dalam pembelajaran yang harus dilakukan oleh dosen. Menurut Masruroh (2015), sintaks suatu model menunjukkan keseluruhan alur atau urutan kegiatan pembelajaran. Sintaks menentukan jenis-jenis tindakan dosen dan mahasiswa yang diperlukan, urutannya, dan tugas-tugas untuk mahasiswa. Sintaks dideskripsikan dalam urutan aktivitas-aktivitas yang disebut tahap. Setiap model mempunyai alur tahap yang berbeda.

2. Sistem sosial

Sistem sosial atau lingkungan belajar adalah situasi atau suasana dan norma yang berlaku dalam model pembelajaran, seperti peran dosen dan aktivitas yang harus dilakukan mahasiswa selama pembelajaran berlangsung. Intinya, sistem sosial adalah pola hubungan antara dosen dengan mahasiswa pada saat pembelajaran berlangsung.

3. Prinsip reaksi

Prinsip reaksi mengacu pada kegiatan yang menggambarkan respons dosen yang wajar terhadap mahasiswa, baik secara individu dan

kelompok, maupun secara keseluruhan. Yaitu bagaimana cara dosen memperhatikan dan memperlakukan siswa, termasuk dosen memberikan respon terhadap pertanyaan, jawaban, tanggapan atau apa yang dilakukan mahasiswa.

4. Sistem pendukung

Sistem pendukung suatu model pembelajaran merupakan semua sarana, bahan, dan alat yang diperlukan untuk menerapkan model tersebut. Sistem pendukung dibedakan menjadi dua jenis, yaitu pendukung langsung dan tidak langsung. Sistem pendukung langsung misalnya perangkat pembelajaran, sedangkan contoh sistem pendukung tidak langsung adalah internet.

Selanjutnya, untuk mengetahui kualitas suatu model pembelajaran, Nieveen (dalam Plomp, dkk., 2010) menjelaskan bahwa terdapat tiga kriteria untuk menentukan kualitas, yaitu validitas, kepraktisan, dan keefektifan. Adapun ketiga kriteria tersebut diuraikan sebagai berikut.

1. Validitas model pembelajaran

Menurut Nieveen, aspek validitas dikaitkan dengan dua hal, yaitu sebagai berikut.

- a. Apakah model yang dikembangkan didasarkan pada rasional teoritik yang kuat. Ini berarti termasuk pada validitas isi.
- b. Apakah terdapat konsistensi secara internal, atau apakah semua komponen model pembelajaran yang dikembangkan, secara konsisten saling berkaitan. Ini berarti termasuk pada validitas konstruk.

2. Kepraktisan model pembelajaran

Kepraktisan suatu model pembelajaran dilihat dari tiga aspek, yaitu: (1) keterlaksanaan sintaks

pembelajaran, (2) keterlaksanaan sistem sosial, dan (3) keterlaksanaan prinsip reaksi, melalui sistem pendukung yang disediakan. Untuk melihat keterlaksanaan ketiga aspek tersebut, maka harus dilaksanakan pengamatan. Model pembelajaran dikatakan praktis jika tingkat keterlaksanaan penerapan model dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas masuk pada kategori baik.

3. Keefektifan model pembelajaran

Model pembelajaran dikatakan efektif, jika dampak instruksional tercapai. Ada dua jenis dampak, yaitu dampak instruksional dan dampak pengiring. Dampak instruksional adalah hasil belajar yang dicapai langsung setelah mahasiswa mengikuti pembelajaran sesuai dengan model yang digunakan, sebagai akibat tercapainya suasana pembelajaran yang sengaja diarahkan untuk mencapai tujuan yang telah ditetapkan atau disepakati. Dampak pengiring adalah hasil belajar lainnya yang dihasilkan oleh suatu kegiatan pembelajaran sesuai dengan model yang digunakan, yaitu dampak sebagai akibat tidak langsung dari pembelajaran.

D. Teori Pengembangan Model Pembelajaran

Model *Reversible Problem based Learning* dikembangkan oleh penulis tentunya melalui suatu proses. Proses inilah yang disebut sebagai penelitian pengembangan. Artinya, model *Reversible Problem based Learning* diciptakan melalui suatu penelitian pengembangan. Sehingga pada buku ini, penulis juga akan menyampaikan teori pengembangan model pembelajaran yang merupakan acuan tim penulis dalam mengembangkan model *Reversible Problem based Learning*.

Borg and Gall (dalam Sugiyono, 2011) menyatakan bahwa penelitian pengembangan adalah suatu proses yang digunakan untuk mengembangkan dan memvalidasi produk-produk yang digunakan dalam pendidikan dan pembelajaran. Produk yang ingin dikembangkan dan divalidasi dalam penelitian ini adalah suatu model pembelajaran.

Jenis penelitian pengembangan yang digunakan oleh tim penuli adalah model pengembangan pendidikan umum Plomp (Plomp, dkk.2010) dengan pertimbangan model ini menunjukkan suatu model yang bersifat umum dalam merancang pendidikan, termasuk pembelajaran. Tahapan pengembangan model Plomp terdiri atas tiga tahap yaitu, (1) tahap penelitian awal (*preliminary research*), (2) tahap prototipe (*prototyping phase*), dan (3) tahap penilaian (*assessment phase*). Masing-masing tahap diuraikan sebagai berikut.

1. Tahap penelitian awal (*preliminary research*)

Hal-hal yang dilakukan pada tahap penelitian awal adalah “*needs and context analysis, review of literature, development of a conceptual or theoretical framework for the study*”, yaitu melakukan analisis kebutuhan dan analisis konteks, mereview literatur, pengembangan suatu konsep atau kerangka teori. Kegiatan yang dilakukan tim peneliti pada tahap ini adalah sebagai berikut.

- a. Mengkaji teori tentang berpikir *reversible* dan pengembangan model pembelajaran.
- b. Melakukan observasi awal di lapangan untuk mengetahui; (1) strategi pembelajaran yang telah diterapkan selama ini, (2) situasi atau keadaan kelas selama pembelajaran.

- c. Memberikan tes kemampuan berpikir *reversible* mahasiswa untuk mengetahui kondisi awal kemampuan berpikir *reversible* mereka.
 - d. Menyusun secara garis besar langkah-langkah model *Reversible Problem based Learning* berdasarkan teori.
2. Tahap *prototype (prototyping phase)*
Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini adalah merancang *prototype*, yaitu dokumen-dokumen yang dibutuhkan dalam pengembangan model pembelajaran berdasarkan hasil penelitian awal, salah satunya adalah perangkat. Perangkat terdiri dari Satuan Acara Perkuliahan (SAP), Lembar Kerja Mahasiswa (LKM), dan Tes Berpikir *Reversible* (TBR). Pada tahap ini, juga terdapat proses validasi, yaitu memvalidasi *prototype* yang dilakukan oleh validator. Validator tentunya ahli di bidang pendidikan matematika dan pengembangan model pembelajaran.
3. Tahap penilaian (*assessment phase*)
Tahap ini merupakan proses penilaian kepraktisan dan keefektifan suatu model pembelajaran. Model dikatakan praktis, jika tingkat keterlaksanaan penerapan model dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas pada kategori yang baik. Keterlaksanaan model dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas ditinjau dari tiga aspek pengamatan, yaitu:
- i. keterlaksanaan sintaks pembelajaran,
 - ii. keterlaksanaan sistem sosial, dan
 - iii. keterlaksanaan prinsip reaksi pengelolaan dengan sistem pendukung yang disediakan.
- Model dikatakan efektif, jika dampak intruksional tercapai. Dampak instruksional untuk model yang dikembangkan adalah meningkatnya kemampuan

berpikir *reversible* mahasiswa calon guru. Kemampuan berpikir *reversible* dikatakan meningkat apabila (1) terdapat peningkatan skor dari *pre* TBR ke *post* TBR, (2) skor TBR mahasiswa tuntas, dikatakan tuntas jika 70% dari keseluruhan mahasiswa dapat menyelesaikan TBR dengan skor minimal 70 dari skor total 100. Sedangkan dampak pengiringnya adalah kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal tentang materi yang telah diajarkan juga meningkat. Kemampuan berpikir *reversible* dikatakan meningkat apabila (1) terdapat peningkatan skor dari *pretes* ke *posttest*; (2) skor tes materi tuntas, dikatakan tuntas jika 70% dari keseluruhan mahasiswa dapat menyelesaikan tes materi dengan skor minimal 70 dari skor total 100.

3

MODEL REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING

Model *Reversible Problem based Learning* dikembangkan oleh penulis dengan harapan dapat melatih dan meningkatkan berpikir *reversible* mahasiswa calon guru. Berpikir *reversible* merupakan aktivitas mental seseorang dalam membangun hubungan dua arah yang berlawanan atau berkebalikan. Menurut Kang & Lee (1999) dan Krutetskii (1976) berpikir *reversible* juga didefinisikan sebagai proses mental seseorang untuk kembali ke data awal setelah memperoleh hasil. Jika dikaitkan dengan pemecahan masalah menurut Polya, maka tahap *looking back* bisa dikatakan sebagai proses berpikir *reversible*. Jika proses *reversible* seseorang dalam pemecahan masalah melalui tahap A,B,C,D,E,F, maka untuk kembali ke data awal tidak harus melalui proses F,E,D,C,B,A, tetapi bisa melalui proses dari F dan menarik kesimpulan ke A.

Salah satu alasan penting mengapa berpikir *reversible* harus dimiliki oleh mahasiswa calon guru matematika adalah berpikir *reversible* merupakan kemampuan mental yang akan memperkuat skema dan mempengaruhi keberhasilan seseorang (baik siswa maupun mahasiswa) dalam memecahkan masalah matematika, bahkan masalah kompleks sekalipun. Sedangkan pemecahan masalah merupakan jantungnya pembelajaran matematika. Ini berarti berpikir *reversible*

mahasiswa calon guru matematika harus diperhatikan dan dikembangkan agar mereka dapat mengembangkan kemampuan berpikir *reversible* siswa dalam memecahkan masalah matematika secara maksimal ketika mereka sudah menjadi guru nantinya. Oleh karena itu, perlu adanya model pembelajaran yang digunakan dosen sebagai wadah meningkatkan berpikir *reversible* mahasiswa calon guru, yaitu model *Reversible Problem based Learning*.

Joyce, Weil, & Calhoun (2009) menyatakan bahwa setiap model pembelajaran mempunyai empat komponen, yaitu (1) sintaks, (2) sistem sosial, (3) prinsip-prinsip reaksi, dan (4) sistem pendukung. Selain empat komponen tersebut hal yang harus diperhatikan dalam model pembelajaran adalah dampak instruksional dan dampak pengiring. Keempat komponen dan dampak model pembelajaran telah dijelaskan pada Bab sebelumnya.

1) Sintaks Model *Reversible Problem based Learning*

Fase pertama model *Reversible Problem based Learning* adalah **persiapan belajar**. Fase ini adalah dosen mempersiapkan mahasiswa untuk belajar. Kegiatan yang dilakukan dosen pada fase ini antara lain; menyampaikan tujuan pembelajaran, materi ajar, dan motivasi atau pentingnya mempelajari materi ajar. Hamalik (2010) menjelaskan bahwa tujuan pembelajaran adalah suatu deskripsi mengenai tingkah laku yang diharapkan tercapai oleh peserta didik setelah berlangsung pembelajaran. Tujuan pembelajaran membantu dalam mendesain sistem pembelajaran. Artinya, melalui tujuan yang jelas dapat membantu guru dalam menentukan strategi pembelajaran, alat, media dan sumber belajar, serta dalam menentukan dan merancang alat evaluasi untuk melihat hasil belajar mahasiswa. Selain itu, tujuan

pembelajaran juga dapat digunakan sebagai kontrol dalam menentukan batas-batas pembelajaran. Melalui penetapan tujuan, guru dapat mengontrol sampai mana mahasiswa telah menguasai kemampuan-kemampuan sesuai dengan tujuan dan tuntutan kurikulum yang berlaku.

Setelah menyampaikan tujuan pembelajaran dan mempersiapkan mahasiswa, fase berikutnya adalah **penyajian materi**. Fase ini adalah dosen menyajikan materi ajar. Menyajikan materi berarti menjelaskan materi yang sedang dipelajari. Tujuan menyajikan materi diantaranya (1) membantu mahasiswa memahami materi (Winataputra, 2004), (2) sebagai bekal mahasiswa dalam membangun hubungan dua arah antar konsep, dan (3) sebagai bekal mahasiswa dalam menyelesaikan masalah-masalah *reversible* pada tahap berikutnya.

Fase ketiga adalah **pembuatan bagan atau skema hubungan reversible**. Fase ini adalah dosen meminta mahasiswa untuk membuat hubungan-hubungan dua arah yang *reversible* antar konsep yang dipelajari secara skematis. Membuat hubungan-hubungan dua arah antar konsep terkait materi mengacu pada definisi berpikir *reversible*, yaitu kemampuan membangun hubungan dua arah (Inhelder&Piaget, 1958; Flanders, 2014; Ramful, 2009; Krutetskii, 1976; Hackenberg, 2010; Slavin, 2010).

Fase keempat adalah **orientasi masalah-masalah reversible**. Fase ini adalah dosen mengorientasikan mahasiswa pada masalah-masalah *reversible* dan membimbing penyelesaian secara individual maupun kelompok. Harapan diberikannya fase ketiga ini adalah agar mahasiswa memperdalam pemahaman mereka tentang materi ajar melalui

masalah *reversible* pada LKM dan sebagai wadah melatih kemampuan berpikir *reversible* mahasiswa. Pada fase ini mahasiswa diberikan Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) yang berisi masalah-masalah *reversible* karena menyelesaikan masalah-masalah *reversible* dapat melatih berpikir *reversible* peserta didik (Ramful, 2015).

Berdasarkan kajian teori tentang berpikir *reversible* (Inhelder&Piaget, 1958; Flanders, 2014; Ramful, 2009; Krutetskii, 1976; Hackenberg, 2010; Slavin, 2010; Adi, 1978; Ramful, 2015) diperoleh karakteristik dari masalah *reversible*, yaitu masalah yang terkait dengan invers. Invers dalam hal ini tidak selalu terkait dengan operasi. Namun untuk memudahkan mahasiswa dalam membangun hubungan dua arah yang *reversible*, peneliti menggunakan masalah-masalah yang saling berkebalikan pada LKM. Dua masalah dikatakan saling berkebalikan/*reversible* jika

1. masalah pertama terkait dengan *invers* sedangkan masalah kedua tidak terkait *invers*, namun kedua masalah berada pada konteks yang sama, atau
2. dilihat dari segi yang ditanyakan dan yang diketahui, jika masalah pertama berisi yang diketahui adalah A dan ditanyakan B maka masalah kedua berisi yang diketahui adalah B dan yang ditanyakan adalah A.

Selain itu, alasan pendukung diberikannya masalah-masalah kepada mahasiswa adalah karena masalah merupakan jantungnya pembelajaran matematika. Ini berarti pembelajaran matematika harus difokuskan pada masalah matematika.

Selanjutnya pada fase ini dosen juga melakukan pembimbingan, yaitu membimbing proses

penyelesaian masalah-masalah *reversible* pada LKM secara individual maupun kelompok. Tujuan aktivitas ini adalah untuk memberikan bantuan awal kepada mahasiswa yang mengalami kesulitan agar mereka mampu menyelesaikan masalah *reversible* dengan benar dan mandiri, karena bisa jadi itu terjadi karena pemahaman mereka berada pada *Zone of Proximal Development* (ZPD). Sebagaimana yang disampaikan oleh Vygotsky (dalam Taylor, 1993), bahwa peserta didik dalam mengkonstruksi suatu konsep perlu memperhatikan lingkungan social yang disebut dengan konstruktivisme social (*socio-constructivism*). Ada dua konsep penting dalam teori Vygotsky, yaitu *Zone of Proximal Development* (ZPD) dan *scaffolding*. *Zone of Proximal Development* (ZPD) merupakan jarak antara tingkat perkembangan sesungguhnya yang didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan masalah secara mandiri dan tingkat perkembangan potensial yang didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan masalah di bawah bimbingan orang dewasa atau melalui kerjasama dengan teman sejawat yang lebih mampu.

Scaffolding merupakan pemberian sejumlah bantuan kepada peserta didik selama tahap-tahap awal pembelajaran, kemudian mengurangi bantuan dan memberikan kesempatan untuk mengambil alih tanggung jawab yang semakin besar setelah ia dapat melakukannya. *Scaffolding* merupakan bantuan yang diberikan kepada peserta didik untuk belajar dan memecahkan masalah. Bantuan tersebut dapat berupa petunjuk, memberikan contoh, dan tindakan-tindakan lain yang memungkinkan peserta didik itu belajar mandiri dalam memecahkan masalah.

Fase kelima adalah **evaluasi**. Fase ini adalah dosen memeriksa pemahaman dan memberikan umpan balik sebagai evaluasi. Menurut Gagne (Siregar & Nara, 2011: 30) fase umpan balik (*feed back phase*) merupakan fase dalam belajar. Pada fase ini mahasiswa menunjukkan bahwa ia telah mencapai tujuan belajarnya. Pada fase ini dosen bisa mengetahui bagaimana berpikir reversible mahasiswa. Salah satu cara yang bisa dilakukan dosen pada fase ini adalah dengan meminta mahasiswa untuk menyajikan hasil penyelesaian pemecahan masalah, yaitu mahasiswa mempresentasikan hasil penyelesaian mereka. Dari sekian banyak kelompok, hanya beberapa saja yang akan ditunjuk dosen untuk presentasi. Sebagai mahasiswa calon guru, kemampuan komunikasi juga menjadi salah satu faktor penting bagi mereka. Sehingga melalui fase ini, diharapkan mahasiswa mampu berkomunikasi dengan jelas dan dapat melatih kemampuan komunikasi mahasiswa sebagai calon guru matematika

Fase keenam adalah **kesimpulan**. Fase ini adalah dosen menyimpulkan inti materi pembelajaran. Pada fase ini dosen memberikan penegasan terhadap materi pembelajaran. Memberikan penekanan dan kesimpulan terkait materi yang telah dipelajari sebagai bentuk penguatan pengetahuan mereka. Uraian tentang sintaks dan tujuan model *Reversible Problem based Learning* disajikan pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1: Sintaks Model *Reversible Problem based Learning*

Fase-Fase	Tujuan
-----------	--------

I. Persiapan belajar	<ul style="list-style-type: none"> - mahasiswa mempersiapkan diri untuk mengikuti pembelajaran - mahasiswa memahami tujuan pembelajaran dan konsep materi ajar sebelumnya - mahasiswa termotivasi untuk mempelajari materi pembelajaran
II. Penyajian materi	<ul style="list-style-type: none"> - mahasiswa memahami konsep yang disampaikan oleh dosen
III. Pembuatan bagan atau skema hubungan <i>reversible</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Memahami minimal dua konsep secara <i>reversible</i> - Melatih kemampuan bernalar mahasiswa
IV. Orientasi pada masalah-masalah <i>reversible</i>	<ul style="list-style-type: none"> - mahasiswa memperdalam pemahaman mereka tentang materi ajar melalui masalah <i>reversible</i> pada LKM - melatih kemampuan berpikir <i>reversible</i> mahasiswa - mahasiswa terbimbing dalam penyelesaian masalah
V. Evaluasi	<ul style="list-style-type: none"> - memeriksa pemahaman mahasiswa - melatih kemampuan komunikasi mahasiswa sebagai calon guru matematika jika fase ini dilakukan melalui presentasi oleh mahasiswa
VI. Kesimpulan	<ul style="list-style-type: none"> - memberikan penegasan terhadap materi pembelajaran

2) Sistem Sosial Model Reversible Problem based Learning

Sistem sosial atau lingkungan belajar adalah situasi atau suasana dan norma yang berlaku dalam model pembelajaran, seperti peran guru dan aktivitas peserta didik dalam pembelajaran. Sistem sosial yang dimaksud dalam penelitian ini adalah lingkungan belajar dalam model *Reversible Problem based Learning* yang memuat peran guru dan aktivitas yang harus dilakukan mahasiswa selama pembelajaran berlangsung. Sistem sosial disajikan pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 : Sistem Sosial Model *Reversible Problem Based Learning*

Fase-Fase	Aktivitas Dosen	Aktivitas Mahasiswa
I. Persiapan belajar	<ol style="list-style-type: none"> 1. menyampaikan tujuan pembelajaran, mengaitkan materi ajar dengan materi yang sudah dipelajari 2. memotivasi mahasiswa dengan cara menyampaikan pentingnya materi ajar 	menyimak tujuan pembelajaran dan motivasi yang disampaikan oleh dosen
II. Penyajian materi	<ol style="list-style-type: none"> 3. menjelaskan materi ajar 	memperhatikan penjelasan dosen
III. Pembuatan bagan atau skema hubungan <i>reversible</i>	<ol style="list-style-type: none"> 4. Meminta mahasiswa untuk membuat skema atau bagan tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari secara berkelompok 	Membuat skema atau bagan tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari

		secara berkelompok
IV. Orientasi pada masalah-masalah <i>reversible</i>	<p>5. memberikan LKM yang berisi masalah yang sesuai dengan tingkat perkembangan mahasiswa dan meminta mahasiswa menyelesaikan masalah pada LKM secara kelompok atau individual</p> <p>6. memberikan <i>scaffolding</i> yaitu membimbing dan mengarahkan mahasiswa dalam belajar secara efektif dan efisien, khususnya dalam memecahkan masalah <i>reversible</i> pada LKM</p>	<p>menerima LKM dan mengerjakan LKM sesuai perintah pada LKM dan mendiskusikan LKM dengan teman dalam satu kelompok ; bertanya kepada dosen atau teman jika terdapat kesulitan; menyimak arahan atau penjelasan dosen</p>
V. Evaluasi	<p>7. meminta mahasiswa dalam suatu kelompok atau beberapa mahasiswa dalam menyajikan hasil tugasnya pada LKM dan skema <i>reversible</i> yang telah dibuat pada fase IV atau memberikan tes kepada mahasiswa dan meminta mahasiswa untuk menyelesaikannya</p> <p>8. melakukan evaluasi terhadap hasil tugas mahasiswa</p>	<p>mempresentasikan hasil penyelesaian LKM dan skema <i>reversible</i> yang telah dibuat pada fase IV di depan kelas, menjawab pertanyaan, bertanya, menyangga atau menyelesaikan masalah yang</p>

		diberikan oleh dosen
VI. Kesimpulan	9. menyimpulkan pembahasan materi perkuliahan	bersama dosen, menyimpulkan pembahasan materi

3) Prinsip Reaksi

Prinsip-prinsip reaksi merupakan pola kegiatan yang menggambarkan respons dosen yang wajar terhadap mahasiswa, baik secara individu dan kelompok, maupun keseluruhan. Prinsip reaksi berkaitan dengan bagaimana cara dosen memperhatikan dan memperlakukan mahasiswa, termasuk bagaimana dosen memberikan respon terhadap pertanyaan, jawaban, tanggapan atau apa yang dilakukan mahasiswa. Jadi prinsip reaksi menekankan pada cara bagaimana dosen melihat perilaku mahasiswa (Masrurroh, 2015). Prinsip reaksi dalam menerapkan model *Reversible Problem Based Learning* disajikan pada Tabel berikut.

Tabel 3.2 : Prinsip reaksi Model *Reversible Problem Based Learning*

Fase	Fase kegiatan	Kegiatan mahasiswa	Respon dosen
I	Persiapan belajar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menyimak tujuan pembelajaran yang disampaikan dosen 2. Bertanya tentang hal-hal yang belum jelas 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menanyakan pemahaman mahasiswa tentang tujuan pembelajaran yang disampaikan dosen 2. Memperhatikan dan menjawab

			pertanyaan atau menjelaskan hal-hal yang belum dipahami oleh mahasiswa
II	Penyajian materi	<ol style="list-style-type: none"> 1. Memperhatikan penjelasan dosen 2. Bertanya tentang materi yang belum dipahami 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Memperhatikan dan menjawab pertanyaan-pertanyaan yang muncul dari mahasiswa 2. Meminta kepada mahasiswa yang lain untuk bertanya tentang materi yang belum dipahami
III	Pembuatan bagan atau skema hubungan <i>reversible</i>	Membuat skema atau bagan tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari	<ol style="list-style-type: none"> 1. meminta mahasiswa untuk berdiskusi antar anggota kelompok 2. Memberi bantuan bila perlu 3. Memperhatikan dan menjawab pernyataan-pertanyaan yang muncul dari mahasiswa
IV	Orientasi pada	<ol style="list-style-type: none"> 1. Membentuk kelompok 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mengingatnkan mahasiswa

	<p>masalah-masalah <i>reversible</i></p>	<p>berdasarkan instruksi dosen (jika dibuat kelompok)</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Menerima LKM dan memahami masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM 3. Menyelesaikan masalah-masalah <i>reversible</i> 	<p>agar tiap-tiap anggota kelompok saling membantu memahami masalah sehingga mampu menyelesaikan masalah-masalah pada LKM</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. Memberi bantuan bila perlu 3. Memperhatikan dan menjawab pernyataan-pertanyaan yang muncul dari mahasiswa
V	Evaluasi	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mempresentasikan / menyajikan hasil penyelesaian masalah pada LKM dan skema <i>reversible</i> yang telah dibuat pada fase IV (jika evaluasi berupa presentasi mahasiswa) 2. Mengerjakan tes secara mandiri (jika evaluasi dilakukan melalui tes tulis) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Memperhatikan presentasi mahasiswa dan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> dan skema <i>reversible</i> yang telah dibuat pada fase IV 2. Memeriksa hasil presentasi atau hasil mahasiswa (jika tes)

			3. Memberi penekanan kepada hal-hal prinsip terkait penyelesaian masalah
VI	Kesimpulan	Membuat kesimpulan	Memberi penekanan tentang inti materi pembelajaran

4) Sistem pendukung

Menurut (Suparno, 2000), sistem pendukung suatu model pembelajaran adalah hal-hal yang dapat mendukung tercapainya tujuan pembelajaran dengan menerapkan model itu. Ada dua jenis sistem pendukung yaitu pendukung langsung dan tidak langsung. Sistem pendukung langsung dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

- (1) Satuan Acara Perkuliahan (SAP) dan sarana yang digunakan dosen sebagai pegangan dalam mengorganisasikan mahasiswa dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas untuk setiap pertemuan.
- (2) Lembar Kerja Mahasiswa (LKM), sarana yang digunakan mahasiswa dalam melatih kemampuan berpikir *reversible* mereka.

Sedangkan sistem pendukung tidak langsung adalah perpustakaan dan internet.

3

CONTOH PERANGKAT MODEL REVERSIBLE PROBLEM BASED LEARNING

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa sebelum menerapkan model *Reversible Problem based Learning*, dosen perlu menyiapkan perangkat yang mendukung penerapan model tersebut, yaitu Satuan Acara Perkuliahan (SAP), Lembar Kerja Mahasiswa (LKM), dan Tes Kemampuan *Reversible*. Namun bab ini, tim penulis hanya akan menguraikan sekilas tentang contoh isi SAP dan LKM yang akan digunakan dalam menerapkan model *Reversible Problem based Learning*.

A. SAP (Satuan Acara Perkuliahan)

SAP merupakan perangkat pembelajaran yang berisi tentang capaian pembelajaran, kemampuan akhir yang direncanakan, indikator, alokasi waktu, dan langkah-langkah kegiatan pembelajaran. SAP yang dicontohkan berikut hanya untuk satu kemampuan akhir yang direncanakan. Secara lengkap, SAP bisa dilihat pada lampiran buku. Berikut ini adalah sekilas contoh isi SAP model *Reversible Problem based Learning*.

1. Mata kuliah : Fungsi Variabel Kompleks
2. Capaian pembelajaran : memahami fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi geometris fungsi kompleks dan hubungan di antaranya serta mampu menerapkannya pada pemecahan masalah-masalah *reversible*.

3. Kemampuan akhir yang direncanakan : memahami fungsi kompleks
4. Indikator pembelajaran
 Indicator disusun tentunya berdasarkan kemampuan akhir yang dicapai kemudian dikembangkan dan disesuaikan dengan karakteristik dari model pembelajaran yang dipilih, dalam hal ini adalah *Reversible Problem based Learning*. Sehingga diperoleh indicator sebagai berikut. (1) Menentukan domain dan range dari fungsi kompleks; (2) memahami sifat fungsi kompleks yang diberikan bernilai tunggal atau tidak; (3) menentukan range dari fungsi kompleks jika diberikan domainnya; (4) menentukan domain dari fungsi kompleks jika diberikan rangenya; (5) menentukan hubungan domain dan range dari suatu fungsi kompleks; (6) menentukan hubungan dua arah antar konsep fungsi bernilai tunggal, fungsi bernilai banyak dengan domain, range, dan sifat-sifat fungsi.
5. Langkah-langkah kegiatan pembelajaran
 Langkah-langkah kegiatan pembelajarn mengacu pada sintaks model *Reversible Problem based Learning*. Kegiatan harus jelas mengacu pada sintaks model, sehingga untuk penyajiannya lebih mudah menggunakan tabel. Penyajian dalam betuk tabel bertujuan agar dosen bisa mengontrol setiap sintak model telah direncanakan dengan baik dan sistematis. Secara rinci langkah-langkah kegiatannya disajikan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 : Langkah-langkah kegiatan model *Reversible Problem based Learning*

Kegiatan dosen	Kegiatan mahasiswa
----------------	--------------------

Fase 1: <i>persiapan belajar</i> (waktu:10 menit)	
Menyampaikan materi yang akan dipelajari yaitu materi fungsi kompleks beserta sifat dan hubungan dua arah di antara konsep tersebut	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari
Menyampaikan pentingnya mempelajari materi yang akan diajarkan, yaitu dengan menjelaskan bahwa materi yang akan dipelajari ini merupakan materi dasar atau konsep prasyarat untuk mempelajari konsep-konsep berikutnya, misalnya fungsi analitik, fungsi harmonik, turunan fungsi kompleks dan seterusnya. Bahwa untuk mempelajari materi-materi tersebut harus faham betul tentang fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang pentingnya mempelajari materi fungsi kompleks
Mengingatkan materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, misalnya tentang definisi fungsi real dan membandingkan antara fungsi real dengan fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang definisi fungsi real
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang hal yang kurang jelas	Menanyakan hal-hal yang kurang jelas
Menjelaskan atau memberi pengarahan kepada mahasiswa tentang pertanyaan yang diajukan mahasiswa (hal-hal yang belum dipahami)	Memperhatikan penjelasan/jawaban dosen
Fase 2: <i>penyajian materi</i> (waktu : 30 menit)	

Membagi LKM ke setiap mahasiswa	Menerima LKM
Meminta mahasiswa untuk memanfaatkan LKM dalam memahami materi, yaitu dengan menyimak dan mempelajari materi di LKM selama dosen menjelaskan materi	Menyimak dan mempelajari LKM sesuai arahan dosen
Menjelaskan tentang materi fungsi kompleks, domain, kodomain, fungsi komplek bernilai tunggal dan bernilai ganda (bahan dari LKM)	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari,
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang belum dipahami dan mendiskusikan pertanyaan mahasiswa di kelas	Menanyakan materi yang belum dipahami dan mengikuti diskusi kelas
Mempersilakan mahasiswa mencatat semua hal-hal penting dari penjelasan dosen	Mencatat hal-hal penting dari penjelasan dosen
Fase 3: <i>orientasi pada masalah-masalah reversible dan pembuatan bagan skema hubungan reversible</i> (waktu : 60 menit)	
Membagi mahasiswa ke dalam kelompok-kelompok dan meminta mahasiswa untuk mengerjakan masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM Latihan 1 secara berkelompok. Pada kegiatan ini diharapkan mahasiswa dapat menentukan karakteristik fungsi kompleks bernilai tunggal dan bernilai banyak. Selain dapat menentukan range	Mengerjakan dan mendiskusikan LKM secara berkelompok, yaitu menyelesaikan masalah-masalah <i>reversible</i>

fungsi jika diberikan domain dan dapat menentukan domain jika diberikan rangenya.	
Meminta mahasiswa untuk membuat skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari pada Latihan 1 secara berkelompok	Mengerjakan dan mendiskusikan pembuatan skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari pada Latihan 1 secara berkelompok
Dosen berkeliling untuk melihat diskusi kelompok serta memberi bantuan scaffolding jika ada kelompok yang mengalami kesulitan serta mengamati hasil kelompok yang menarik untuk dibahas pada fase diskusi berikutnya.	Menerima <i>scaffolding</i> pada kelompok yang mengalami kesulitan
Fase 4: <i>evaluasi</i> (waktu : 40 menit)	
Meminta salah satu atau beberapa kelompok untuk menyajikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3	Mahasiswa menyajikan/mempresentasikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3
Mendiskusikan pekerjaan mahasiswa yang dipresentasikan secara klasikal dan memberi kesempatan kelompok lain untuk menanggapi dan mendiskusikan jawaban yang berbeda	Bersama dosen mendiskusikan hasil pekerjaan mahasiswa
Memberi penekanan kepada hal-hal prinsip terkait penyelesaian masalah.	Memperhatikan penjelasan dosen

Fase 5: <i>kesimpulan</i> (waktu : 10 menit)	
Menyimpulkan atau memberi penekanan tentang inti materi yang telah dipelajari terkait fungsi kompleks, domain, range, jenis fungsi kompleks beserta hubungan dua arah di antaranya.	Memperhatikan penjelasan dosen

B. Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)

LKM merupakan salah satu perangkat yang berperan penting terhadap keberhasilan dosen dalam menerapkan model *Reversible Problem based Learning*. LKM harus disusun berdasarkan karakteristik model. LKM harus memuat masalah-masalah *reversible* yang merupakan ciri khas dari model *Reversible Problem based Learning*. Oleh karena itu, dosen perlu memikirkan betul masalah-masalah *reversible* yang akan diberikan ke mahasiswa sehingga tujuan pembelajaran dapat tercapai. LKM yang dicontohkan berikut hanya untuk satu kemampuan akhir yang direncanakan. Secara lengkap, LKM bisa dilihat pada lampiran buku.

LKM paling tidak memuat 3 hal, yaitu tujuan atau indicator pembelajaran, materi, dan latihan soal. Buku ini menyajikan contoh LKM yang sistematikanya terdiri dari cover, tujuan dan indicator pembelajaran, identitas kelompok, materi, dan latihan soal. Tujuan dan indicator pembelajaran perlu disampaikan pada LKM agar (1) mahasiswa bisa mengetahui secara transparan terkait tujuan yang harus mereka capai; (2) agar dosen bisa mengontrol isi LKM, karena materi LKM mengacu pada tujuan pembelajaran. Kemudian materi juga perlu disajikan pada LKM agar mahasiswa

bisa mempelajari materi terlebih dahulu materi sebelum menyelesaikan soal. Artinya, materi sebagai bekal mahasiswa dalam mengerjakan soal-soal pada LKM.

Soal dalam hal ini adalah masalah-masalah *reversible*. Berikut ini adalah sekilas contoh masalah-masalah pada LKM.

Soal 1:

Tentukan apakah fungsi berikut merupakan fungsi bernilai tunggal ataukah bernilai banyak. Jelaskan bagaimana cara anda menentukannya!

- a. $f(z) = z^4$
- b. $g(z) = z^{1/4}$
- c. $g(z) = |z^{1/4}|$
- d. $h(z) = |z^4|$
- e. $f(z) = z^2 + z^{1/2}$
- f. $f(a + bi) = a - bi$
- g. $f(a + bi) = b + ai$
- h. $f(a + bi) = a^{1/2} + bi$

Soal 2:

Setelah anda mengerjakan soal no 1 dari a sampai h, dapatkah anda simpulkan ciri-ciri suatu fungsi kompleks bernilai tunggal atau bernilai banyak?

Keterangan:

Soal 1 dan soal 2 bertujuan untuk (1) mengecek pemahaman mahasiswa terkait fungsi kompleks bernilai tunggal dan fungsi kompleks bernilai banyak; (2) melatih mahasiswa untuk bernalar.

Soal 3:

Jika diketahui $f(z) = 3z$ maka

- a. Tentukan $f(2), f(3i), f(2 + 3i), f(1), f(-1), f(-i)$,
prapeta dari $3i$, prapeta dari $6 + 9i$, dan prapeta dari
1!

- b. Tentukan Range dari f , jika Domain f adalah C . Jelaskan bagaimana anda menentukannya.
- c. Jika diketahui Range $f = \{2+yi \mid y \in \mathbb{R}\}$, tentukan Domain f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.
- d. Jika diketahui Domain f adalah A dengan $A = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2 + y^2 = 1\}$, tentukan Range f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.
- e. Jika diketahui Range $f = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2 + y^2 = 1\}$, tentukan Domain f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.
- f. Sifat-sifat apa yang dapat anda temukan dari fungsi f !

Keterangan:

Soal 3a merupakan masalah *reversible*. Soal 3a berisi sebuah fungsi dan suatu prapeta, mahasiswa diminta untuk menentukan peta dari prapeta yang diberikan melalui suatu fungsi yang diketahui. Soal 3a juga berisi sebuah fungsi dan suatu peta, mahasiswa diminta untuk menentukan prapeta dari peta yang diberikan melalui suatu fungsi yang diketahui. Pada intinya soal 3a ini berisi dua jenis soal. Pertama, diketahui suatu fungsi dan prapeta, yang ditanyakan adalah peta. Kedua, diketahui suatu fungsi dan peta, yang ditanyakan adalah prapeta. Kedua jenis ini saling berkebalikan dari segi yang diketahui dan ditanyakan. Soal 3b, 3c, 3d, dan 3e merupakan masalah *reversible*. Soal 3b dan 3d berisi suatu fungsi dan domain, mahasiswa diminta untuk menentukan range fungsi. Soal 3c dan 3e berisi suatu suatu fungsi dan range, mahasiswa diminta untuk menentukan domain fungsi. Soal 3b dan 3d merupakan kebalikan dari soal 3c dan 3e.

Soal 4:

Jika diketahui $f(z) = (2 + i)z - 3i$.

- Tentukan $f(i), f(1 + i), f(1)$, prapeta dari $-1 - i$, prapeta dari 1 , dan prapeta dari $2 - 2i$!
- Tentukan Range f jika Domain $f = \{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Jelaskan cara anda mendapatkannya.
- Tentukan Domain f jika Range $f = \{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Jelaskan cara anda mendapatkannya.

Soal 4a merupakan masalah *reversible*, alasannya sama dengan soal 3a. Yaitu terdapat dua jenis soal pada nomor 4a. Pertama, diketahui suatu fungsi dan prapeta, sedangkan yang ditanyakan adalah peta. Kedua, diketahui suatu fungsi dan peta, sedangkan yang ditanyakan adalah prapeta. Kedua jenis ini saling berkebalikan dari segi yang diketahui dan ditanyakan. Selanjutnya soal 4b dan 4c saling berkebalikan. Nomor 4b berisi suatu fungsi dan rangnya, yang ditanyakan adalah domain. Sedangkan yang diketahui pada soal nomor 4c adalah peta dan fungsi, kemudian yang ditanyakan adalah prapetanya.

Soal 5:

Jika diketahui $g(z) = z^2$. Tentukan $g(2i), g(i), g(0), g(-i), g(-2i)$, prapeta dari -1 dan prapeta dari -4 !

Soal 6:

Jika diketahui $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Tentukan $g(i)$ dan $g(4)$ serta prapeta dari $\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan prapeta dari $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}$!

Soal 5 merupakan masalah *reversible* dengan alasan yang sama dengan soal nomor 3a dan 4a. begitu pula untuk soal nomor 6. Hanya saja beda jenis fungsi kompleks. Pada soal nomor 3a, 4a, dan 5, fungsi yang diberikan pada soal adalah fungsi kompleks bernilai

tunggal, sedangkan soal nomor 6, fungsi yang diberikan adalah fungsi kompleks bernilai banyak.

Soal 7:

Hubungan apa saja yang anda dapatkan dari Domain, Range, jenis fungsi !

Soal 8:

Buatlah bagan atau peta konsep secara dua arah dari hasil yang telah anda pelajari terkait fungsi bernilai tunggal, fungsi bernilai banyak dengan Domain, dan Range! Kemudian berikan penjelasan pada skema yang Anda buat!

Soal nomor 7 mendukung jawaban soal nomor 8. Soal nomor 8 ini merupakan salah satu karakteristik inti dari model *Reversible Problem based Learning*. Yaitu mahasiswa diminta untuk membuat skema hubungan dua arah antar konsep beserta penjelasannya. Melalui soal ini, mahasiswa dituntut untuk berpikir bahkan bernalar secara dua arah yang saling berkebalikan. Dengan melatih mahasiswa berpikir secara dua arah, diharapkan dapat meningkatkan kemampuan *reversible* mahasiswa sekaligus kemampuan mahasiswa dalam pemecahan masalah.

DAFTAR PUSTAKA

- Adi, H. (1978). Intellectual development and reversibility of thought in equation solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9/3, 204-213
- Arends, R.I., Wenitzky, N.E., & Tannenboun, M.D. 2001. *Exploring Teaching: An introduction to education*. New York: McGraw-Hill Companies, Inc.
- Burhanuddin, dkk. 2008. *Teori Belajar dan Pembelajaran*, Yogyakarta An-Ruzz Media
- Baharudin dan Wahyuni, Nur. 2008. *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Ar-Ruzz Media. Yogyakarta.
- Dimiyati dan Mudjiono. 2002. *Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Flanders, S. T. (2014) Investigating flexibility, reversibility, and multiple representations in a calculus environment. *Dissertation*, Not Published.
- Hamalik, Oemar. 2010. *Kurikulum dan Pembelajaran*, Jakarta: Bumi Aksara.
- Heckenberg, A. J. (2010). Students' Reasoning With Reversible Multiplicative Relationships. *Cognition and Instruction*, 28/4, 383-432.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basic Books.
- Joyce, B., Weil, M., & Calhoun, E. 2009. *Models of Teaching, Eighth Edition*. Boston: Allyn and Bacon.
- Kang, Mee-Kwang, & Lee, Byung-Soo. 1999. On Fuzzied Representation of Piagetian Reversible Thinking. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in mathematical Education*, Vol. 3, No. 2, 99-112

- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Maf'ulah, S., Fitriyani, H., Yudianto, E., Fiantika, F. R., & Hariastuti, R. M., (2019). Identifying the Reversible Thinking Skill of Students in Solving Function Problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 1188 1-8.
- Maf'ulah S., Juniati, D., & Siswono, T. Y. E., (2017). The aspects of reversible thinking in solving algebraic problems by an elementary student winning national olympiad medals in science. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 2/15 189-194.
- Maf'ulah S., Juniati, D., & Siswono, T. Y. E., (2016). Pupils' error on the concept of reversibility in solving arithmetic problems. *Educational Research and Reviews*, 11/18, 1775-1784.
- Moreno, Roxane. 2010. *Educational Psychology*. University of New Mexico.
- Ramful, A. (2015). Reversible reasoning and the working backwards problem solving strategy. *Australian Mathematics Teacher*, 71/4, 28–32.
- Ramful, A. (2009). Reversible Reasoning In Multiplicative Situations: Conceptual Analysis, Affordances and Constralints. *Dissertation*, Unpublished.
- Plomp, T. 2010. Educational Design Research: an Introduction. Dalam *An Intoduction to Educational Design Research. Proceedings of the seminar conducted at the East China Normal University, Shanghai (PR China), November 23-26, 2007*.
- Sagala. Syaiful. 2009. *Konsep dan Makna Pembelajaran; Untuk Membantu Memecahkan Problematika Belajar dan Mengajar*. cet. ke-6. Alfabeta. Bandung
- Slavin, R.E. 2000. *Educational Psychology: Theory and Practice*. Boston: Allyn & Bacon.

- Taylor. 1993. Vygotskian Influences in Mathematics Education with Particular Reference to Attitude Development. Dalam *Journal Focus on Learning Mathematics*. Vol. 15 No.2 hal 3-17.
- Winataputra, U. S. 2004. *Strategi Belajar Mengajar*. Jakarta: Pusat Penerbitan Universitas Terbuka.

Berikut akan diberikan contoh SAP, LKM, dan Tes Berpikir *Reversible* yang bisa digunakan sebagai referensi atau pedoman dalam menyusun perangkat untuk menerapkan model *Reversible Problem based Learning*. Materi yang dicontohkan dalam buku ini adalah materi fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi geometris fungsi kompleks pada mata kuliah Fungsi Variabel Kompleks. Berikut adalah contoh perangkatnya.

Lampiran 1: SAP

SATUAN ACARA PERKULIAHAN (SAP)

- Matakuliah** : Fungsi Variabel Kompleks
- Capaian Pembelajaran** : Memahami fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi geometris fungsi kompleks dan hubungan di antaranya serta mampu menerapkannya pada pemecahan masalah-masalah reversible.
- Kemampuan Akhir yang direncanakan** :
1. Memahami fungsi kompleks dan invers fungsi kompleks
 2. Memahami dan mampu membuat representasi geometris dari fungsi kompleks
 3. Memahami hubungan di antara fungsi kompleks, invers dan representasi geometris
 4. Menerapkan konsep fungsi kompleks, invers fungsi dan representasi geometris pada pemecahan masalah-masalah reversible

5. Mampu menggunakan ICT (software) untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometris.
- Alokasi Waktu** : 12 x 50'
- Indikator** :
1. Menentukan domain dan range dari fungsi kompleks
 2. Memahami sifat fungsi kompleks yang diberikan bernilai tunggal atau tidak.
 3. Menentukan range dari fungsi kompleks jika diberikan domainnya
 4. Menentukan domain dari fungsi kompleks jika diberikan rangenya
 5. Menentukan hubungan domain dan range dari suatu fungsi kompleks
 6. Menentukan hubungan dua arah antar konsep fungsi bernilai tunggal, fungsi bernilai banyak dengan Domain, Range, dan sifat-sifat fungsi
 7. Menentukan invers dari fungsi kompleks yang diberikan
 8. Menentukan fungsi kompleks jika diketahui inversnya
 9. Menyelesaikan masalah reversible terkait fungsi kompleks dan inversnya.
 10. Menemukan sifat invers fungsi
 11. Menentukan hubungan dua arah antara fungsi dan inversnya
 12. Menentukan bagian real dan bagian imajiner dari suatu fungsi kompleks beserta sifatnya

13. Menentukan sifat geometris dari fungsi kompleks
14. Menentukan representasi geometris dari fungsi kompleks.
15. Memecahkan masalah reversible terkait fungsi kompleks, invers kompleks dan representasi geometrisnya.
16. Menentukan hubungan dua arah antar konsep fungsi kompleks, invers kompleks dan representasi geometrisnya
17. Mampu menerapkan software untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometris.

Materi Pokok : Fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi geometris fungsi kompleks dan hubungan dua arah di antara konsep-konsep tersebut serta penerapan dengan menggunakan *software*.

Penilaian: : Tugas dan tes tulis

Rencana:

Kegiatan	Indikator	Durasi waktu	Keterangan
I	indikator 1 s.d 6	3 x 50'	Satu siklus
II	indikator 7 s.d 11	3 x 50'	Satu siklus
III	indikator 12 s.d 17	6 x 50'	Satu siklus

Kegiatan I : 3 x 50 menit

Kegiatan dosen	Kegiatan mahasiswa
Fase 1: <i>persiapan belajar</i> (waktu:10 menit)	
Menyampaikan materi yang akan dipelajari yaitu materi fungsi kompleks beserta sifat dan hubungan dua arah di antara konsep tersebut	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari
Menyampaikan pentingnya mempelajari materi yang akan diajarkan, yaitu dengan menjelaskan bahwa materi yang akan dipelajari ini merupakan materi dasar atau konsep prasyarat untuk mempelajari konsep-konsep berikutnya, misalnya fungsi analitik, fungsi harmonic, turunan fungsi kompleks dan seterusnya. Bahwa untuk mempelajari materi-materi tersebut harus faham betul tentang fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang pentingnya mempelajari materi fungsi kompleks
Mengingatkan materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, misalnya tentang definisi fungsi real dan membandingkan antara fungsi real dengan fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang definisi fungsi real
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang hal yang kurang jelas	Menanyakan hal-hal yang kurang jelas
Menjelaskan atau memberi pengarahan kepada mahasiswa tentang pertanyaan yang diajukan mahasiswa (hal-hal yang belum dipahami)	Memperhatikan penjelasan/jawaban dosen
Fase 2: <i>penyajian materi</i> (waktu : 30 menit)	
Membagi LKM ke setiap mahasiswa	Menerima LKM
Meminta mahasiswa untuk memanfaatkan LKM dalam	Menyimak dan mempelajari LKM sesuai arahan dosen

memahami materi, yaitu dengan menyimak dan mempelajari materi di LKM selama dosen menjelaskan materi	
Menjelaskan tentang materi fungsi kompleks, domain, kodomain, fungsi komplek bernilai tunggal dan bernilai ganda (bahan dari LKM)	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari,
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang belum dipahami dan mendiskusikan pertanyaan mahasiswa di kelas	Menanyakan materi yang belum dipahami dan mengikuti diskusi kelas
Mempersilakan mahasiswa mencatat semua hal-hal penting dari penjelasan dosen	Mencatat hal-hal penting dari penjelasan dosen
Fase 3: orientasi pada masalah-masalah reversible dan pembuatan bagan skema hubungan reversible (waktu : 60 menit)	
Membagi mahasiswa ke dalam kelompok-kelompok dan meminta mahasiswa untuk mengerjakan masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM Latihan 1 secara berkelompok. Pada kegiatan ini diharapkan mahasiswa dapat menentukan karakteristik fungsi kompleks bernilai tunggal dan bernilai banyak. Selain dapat menentukan range fungsi jika diberikan domain dan dapat menentukan domain jika diberikan rangenya.	Mengerjakan dan mendiskusikan LKM secara berkelompok, yaitu menyelesaikan masalah-masalah <i>reversible</i>
Meminta mahasiswa untuk membuat skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari pada Latihan 1 secara berkelompok	Mengerjakan dan mendiskusikan pembuatan skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari pada Latihan 1 secara berkelompok

Dosen berkeliling untuk melihat diskusi kelompok serta memberi bantuan <i>scaffolding</i> jika ada kelompok yang mengalami kesulitan serta mengamati hasil kelompok yang menarik untuk dibahas pada fase diskusi berikutnya.	Menerima <i>scaffolding</i> pada kelompok yang mengalami kesulitan
Fase 4: <i>evaluasi</i> (waktu : 40 menit)	
Meminta salah satu atau beberapa kelompok untuk menyajikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3	Mahasiswa menyajikan/mempresentasikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3
Mendiskusikan pekerjaan mahasiswa yang dipresentasikan secara klasikal dan memberi kesempatan kelompok lain untuk menanggapi dan mendiskusikan jawaban yang berbeda	Bersama dosen mendiskusikan hasil pekerjaan mahasiswa
Memberi penekanan kepada hal-hal prinsip terkait penyelesaian masalah.	Memperhatikan penjelasan dosen
Fase 5: <i>kesimpulan</i> (waktu : 10 menit)	
Menyimpulkan atau memberi penekanan tentang inti materi yang telah dipelajari terkait fungsi kompleks, domain, range, jenis fungsi kompleks beserta hubungan dua arah di antaranya.	Memperhatikan penjelasan dosen

Kegiatan II : 3 x 50 menit

Kegiatan dosen	Kegiatan mahasiswa
Fase 1: persiapan belajar (waktu:10 menit)	

Menyampaikan materi yang akan dipelajari yaitu materi invers fungsi kompleks dan hubungan dua arah antara fungsi kompleks dan inversnya	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari
Menyampaikan pentingnya mempelajari materi yang akan diajarkan, yaitu dengan menjelaskan bahwa materi yang akan dipelajari ini merupakan materi dasar atau konsep prasyarat untuk mempelajari konsep-konsep berikutnya, misalnya fungsi analitik, fungsi harmonik, turunan fungsi kompleks dan seterusnya. Bahwa untuk mempelajari materi-materi tersebut harus faham betul tentang invers fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang pentingnya mempelajari materi invers fungsi kompleks
Mengingatkan materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang fungsi kompleks	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang fungsi kompleks
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang hal yang kurang jelas dan mendiskusikannya	Menanyakan hal-hal yang kurang jelas
Fase 2: penyajian materi (waktu : 30 menit)	
Meminta mahasiswa untuk memanfaatkan LKM dalam memahami materi, yaitu dengan menyimak dan mempelajari materi di LKM selama dosen menjelaskan materi	Menyimak dan mempelajari LKM sesuai arahan dosen
Menjelaskan tentang materi invers fungsi kompleks (bahan dari LKM)	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari,

Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang belum dipahami dan mendiskusikan pertanyaan mahasiswa	Menanyakan materi yang belum dipahami dan mengikuti diskusi kelas
Fase 3: orientasi pada masalah-masalah reversible dan pembuatan bagan skema hubungan reversible (waktu : 60 menit)	
Membagi mahasiswa ke dalam kelompok-kelompok dan meminta mahasiswa untuk mengerjakan masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM Latihan 2 secara berkelompok	Mengerjakan dan mendiskusikan LKM secara berkelompok, yaitu menyelesaikan masalah-masalah <i>reversible</i>
Meminta mahasiswa untuk membuat skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari	Mengerjakan dan mendiskusikan pembuatan skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari
Dosen berkeliling untuk melihat diskusi kelompok serta memberi <i>scaffolding</i> jika ada kelompok yang mengalami kesulitan serta mengamati hasil kelompok yang menarik untuk dibahas pada fase diskusi berikutnya.	Menerima <i>scaffolding</i> pada kelompok yang mengalami kesulitan
Fase 4: evaluasi (waktu :40 menit)	
Meminta salah satu atau beberapa kelompok untuk menyajikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3	Mahasiswa menyajikan/mempresentasikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3
Mendiskusikan pekerjaan mahasiswa yang dipresentasikan secara klasikal dan memberi kesempatan kelompok lain untuk menanggapi dan mendiskusikan jawaban yang berbeda	Bersama dosen mendiskusikan hasil pekerjaan mahasiswa

Memberi penekanan kepada hal-hal prinsip terkait penyelesaian masalah.	Memperhatikan penjelasan dosen
Fase 5: kesimpulan (waktu : 10 menit)	
Menyimpulkan atau memberi penekanan tentang inti materi yang telah dipelajari terkait invers fungsi kompleks dan hubungan dua arah antara fungsi kompleks dan inversnya	Memperhatikan penjelasan dosen

Kegiatan III : 6 x 50 menit

Kegiatan dosen	Kegiatan mahasiswa
Fase 1: persiapan belajar (waktu:15 menit)	
Menyampaikan materi yang akan dipelajari yaitu materi bagian real dan bagian imajiner fungsi kompleks, representasi fungsi kompleks secara geometris, dan penerapan ICT (<i>software</i>) untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometris	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari
Menyampaikan pentingnya mempelajari materi yang akan diajarkan, yaitu dengan mempelajari bagian real dan imajiner suatu fungsi akan membantu untuk melihat perubahan atau hasil transformasi suatu fungsi. Selain itu dengan menggunakan ICT dalam representasi geometris fungsi akan bermanfaat dalam melihat perubahan bentuk geometris dari fungsi-fungsi yang sangat kompleks yang biasanya susah dilihat dengan cara manual. Dapat juga digunakan untuk	Memperhatikan penjelasan dosen tentang pentingnya mempelajari materi invers fungsi kompleks

menganalisa fungsi dengan lebih mendalam.	
Mengingatnkan materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang bilangan kompleks, fungsi kompleks dan representasi fungsi real secara geometri	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi sebelumnya yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari, yaitu tentang bilangan kompleks, fungsi kompleks dan representasi fungsi real secara geometri
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang hal yang kurang jelas	Menanyakan hal-hal yang kurang jelas
Menjelaskan atau memberi pengarahan kepada mahasiswa tentang pertanyaan yang diajukan mahasiswa (hal-hal yang belum dipahami)	Memperhatikan penjelasan/jawaban dosen
Fase 2: penyajian materi (waktu : 50 menit)	
Menjelaskan tentang materi bagian real dan bagian imajiner fungsi kompleks, representasi fungsi kompleks secara geometri, penerapan <i>software</i> untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometri (bahan dari LKM)	Memperhatikan penjelasan dosen tentang materi yang akan dipelajari,
Mempersilakan mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang belum dipahami dan mendiskusikan pertanyaan mahasiswa	Menanyakan materi yang belum dipahami dan mengikuti diskusi kelas
Fase 3: orientasi pada masalah-masalah reversible dan pembuatan bagan skema hubungan reversible (waktu : 120 menit)	
Meminta mahasiswa untuk memanfaatkan LKM dalam memahami materi, yaitu dengan menyimak dan mempelajari	Menyimak dan mempelajari LKM sesuai arahan dosen

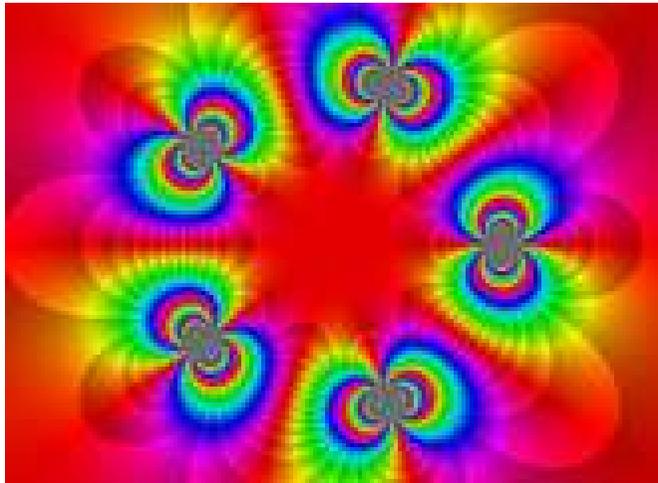
materi di LKM selama dosen menjelaskan materi	
Membagi mahasiswa ke dalam kelompok-kelompok dan meminta mahasiswa untuk mengerjakan masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM Latihan 3 secara berkelompok	Mengerjakan dan mendiskusikan LKM secara berkelompok, yaitu menyelesaikan masalah-masalah <i>reversible</i>
Meminta mahasiswa untuk membuat skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari	Mengerjakan dan mendiskusikan pembuatan skema atau bagan secara berkelompok tentang hubungan-hubungan secara dua arah dari konsep-konsep yang telah dipelajari
Dosen berkeliling untuk melihat diskusi kelompok serta memberi <i>scaffolding</i> jika ada kelompok yang mengalami kesulitan serta mengamati hasil kelompok yang menarik untuk dibahas pada fase diskusi berikutnya.	Menerima <i>scaffolding</i> pada kelompok yang mengalami kesulitan
Fase 4: evaluasi (waktu : 85 menit)	
Meminta salah satu atau beberapa kelompok untuk menyajikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3	Mahasiswa menyajikan/mempresentasikan hasil penyelesaian masalah-masalah <i>reversible</i> pada LKM dan skema yang telah dibuat pada fase 3
Mendiskusikan pekerjaan mahasiswa yang dipresentasikan secara klasikal dan memberi kesempatan kelompok lain untuk menanggapi dan mendiskusikan jawaban yang berbeda	Bersama dosen mendiskusikan hasil pekerjaan mahasiswa
Memberi penekanan kepada hal-hal prinsip terkait penyelesaian masalah.	Memperhatikan penjelasan dosen
Fase 5: kesimpulan (waktu : 30 menit)	
Menyimpulkan atau memberi penekanan tentang inti materi	Memperhatikan penjelasan dosen

<p>yang telah dipelajari terkait bagian real dan bagian imajiner fungsi kompleks, representasi fungsi kompleks secara geometri, dan penerapan <i>software</i> untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometri, serta hubungan dua arah antar konsep fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi fungsi kompleks secara geometri.</p>	
--	--

Lampiran 2: LKM

Lembar Kerja Mahasiswa *Model Reversible Problem Based Learning*

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS



oleh :

Dr. Syarifatul Maf'ulah, M.Pd

Prof. Dr. Dwi Juniati, M.Si



Universitas Negeri Surabaya

STKIP PGRI Jombang



FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

MATERI :

Fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, representasi geometris fungsi kompleks dan hubungan dua arah di antaranya serta penerapan dengan menggunakan software.

Tujuan :

- ∞ Mahasiswa memahami fungsi kompleks dan invers fungsi kompleks
- ∞ Mahasiswa memahami dan mampu membuat representasi geometris dari fungsi kompleks
- ∞ Mahasiswa memahami hubungan dua arah di antara fungsi kompleks, invers dan representasi geometris
- ∞ Mahasiswa mampu menerapkan konsep fungsi kompleks, invers fungsi dan representasi geometris pada pemecahan masalah-masalah reversible
- ∞ Mahasiswa mampu menggunakan ICT (software) untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometris.

**FUNGSI KOMPLEKS, INVERS FUNGSI KOMPLEKS, DAN
REPRESENTASI FUNGSI KOMPLEKS SECARA
GEOMETRI**

Anggota kelompok

Nama dan NIM

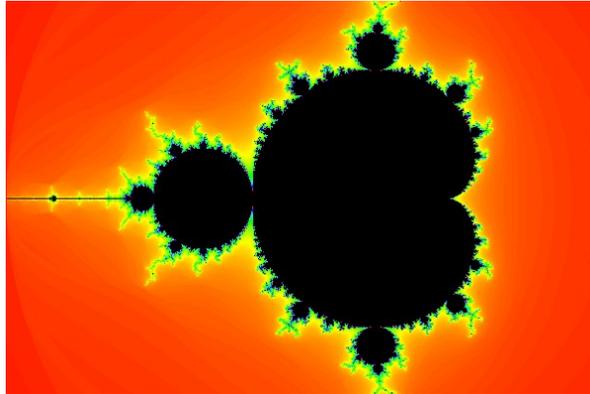
1.
2.
3.
4.
5.

Pendahuluan

Bilangan kompleks muncul bermula dari proses penentuan “himpunan penyelesaian dari persamaan $x^2 + 1 = 0$ ”. Pada zaman itu, para matematikawan berusaha memecahkan masalah tersebut. Butuh waktu bertahun-tahun dalam menyelesaikan masalah tersebut. Berdasarkan persamaan $x^2 + 1 = 0$ diperoleh $x^2 = -1$ artinya $x^2 \leq 0$. Hal ini bertentangan dengan sifat bilangan real $x^2 \geq 0$. Sehingga dibutuhkan bilangan lain yang bukan bilangan real yang memenuhi persamaan tersebut. Singkat cerita, dari masalah inilah kemudian muncul

bilangan $\sqrt{-1}$ yang kemudian dinotasikan dengan i dan $i^2 = -1$ dan disebut sebagai bilangan imajiner. Lebih lanjut kemudian muncullah himpunan bilangan kompleks yang lebih luas dari himpunan bilangan real yang dinotasikan dengan $C = \{z = a + bi \mid a, b \text{ bilangan real}\}$. Mempelajari bilangan kompleks sangat penting karena bilangan kompleks dapat diaplikasikan pada berbagai bidang, seperti pada pemrosesan signal, kuantum mekanik, cara kerja elektromagnetis, analisis vibrasi dan masih banyak lagi yang lainnya. Selain itu, fungsi pada variable kompleks juga memegang peranan yang tak kalah penting. Misalkan fungsi atau transformasi variable kompleks diaplikasikan pada saat peluncuran sebuah satelit, yaitu mentransformasikan bidang pada bumi ke bidang di ruang angkasa melalui fungsi kompleks. Fungsi kompleks juga dimanfaatkan dalam membentuk berbagai macam bentuk geometris yang menarik dan indah seperti yang banyak dipelajari pada geometri Fractal. Contohnya Himpunan Mandelbrot yang dibentuk pada bidang kompleks dari iterasi pada fungsi kompleks $f(z) = z^2 + c$ dengan menggambarkan semua titik c dimana barisan (z_n) dengan $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ tetap terbatas pada nilai mutlaknya.

Dengan menggambarkan semua titik c pada bidang kompleks yang memenuhi sifat di atas diperoleh Himpunan Mandelbrot yang digambarkan seperti berikut ini.



Masih banyak lagi gambar-gambar seni yang menarik yang dapat dibentuk melalui fungsi kompleks yang akan kita pelajari nanti dengan menggunakan software.

Materi 1 : FUNGSI KOMPLEKS

Fungsi kompleks hampir sama dengan fungsi yang telah dipelajari sebelumnya, hanya saja bedanya Domain (daerah asal) dan Range (daerah hasil) berupa subset dari himpunan bilangan kompleks.

Misalkan himpunan A dan himpunan B masing-masing adalah subset dari himpunan bilangan kompleks, maka fungsi kompleks f dari A ke B dinotasikan $f : A \rightarrow B$ adalah relasi yang memasangkan setiap bilangan kompleks z di A dengan bilangan kompleks di B .

A disebut **Domain (Daerah asal)** dari fungsi f dan B disebut **Kodomain (Daerah Kawan)**.

Jika $f(z)=w$ menyatakan w adalah peta dari z oleh fungsi f , maka $f = \{(z, w) \mid z \in A, w \in B\}$ sehingga **Range (Daerah hasil)** dari fungsi f adalah $R = \{w \mid f(z) = w, \forall z \in A\}$.

Berbeda dengan fungsi pada himpunan bilangan real yang bersifat tunggal, maka fungsi kompleks bisa bernilai

banyak, artinya suatu bilangan kompleks dapat dipetakan ke lebih dari satu bilangan kompleks. Jika setiap bilangan kompleks z di A dipasangkan dengan tepat satu dengan bilangan kompleks di B maka fungsi f dari A ke B disebut **fungsi kompleks bernilai tunggal**. Jika ada bilangan kompleks z di A dipasangkan dengan lebih dari satu bilangan kompleks di B maka disebut **fungsi kompleks bernilai banyak**.

Contoh 1:

Fungsi $f : C \rightarrow C$ dengan $f(z) = 2z$.

Untuk $z_1 = 1 + 4i$ oleh f dipetakan ke $f(1 + 4i) = 2(1 + 4i) = 2 + 8i$.

Domain dari f adalah himpunan bilangan kompleks C . Karena setiap bilangan kompleks z merupakan peta dari $\frac{1}{2}z$ oleh f maka Range f adalah K .

Karena setiap bilangan kompleks dikalikan dengan 2 bernilai tunggal maka f merupakan fungsi kompleks bernilai tunggal.

Contoh 2:

Fungsi $f : C \rightarrow C$ dengan $f(z) = z^2$ adalah fungsi kompleks bernilai tunggal, karena untuk setiap dipilih z bilangan kompleks, maka hanya ada satu nilai z^2 . Misalkan dipilih $z = 2i$ maka nilai dari $f(2i)$ adalah -4 . Artinya, tidak ada nilai dari $f(2i)$ selain -4 .

Jika $z = i$ maka $f(i) = -1$, demikian pula jika $z = -i$ maka $f(-i) = -1$.

Secara umum, $f(a+bi) = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$

Contoh 3:

Fungsi $f : C \rightarrow C$ dengan $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ adalah contoh fungsi kompleks yang bernilai banyak, karena ada z bilangan kompleks dengan tiga nilai dari $f(z)$ yang berbeda. Misal, dipilih $z = -8$, maka nilai dari $f(-8) = (-8)^{\frac{1}{3}}$ adalah $1 + i\sqrt{3}$, -2 ,

dan $1 - i\sqrt{3}$. Kita bisa mengubah Domain dari f supaya fungsi f bernilai tunggal.

Contohnya jika dipilih $A = \mathbb{R}^+ = \{x+0i \mid x \geq 0\}$ maka fungsi f pada A bernilai tunggal, karena merupakan akar pangkat 3 dari bilangan real seperti yang kita kenal.

Contoh 4:

Fungsi $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $f(z) = |z|$.

Fungsi g merupakan fungsi bernilai tunggal, karena memetakan setiap bilangan kompleks ke modulusnya. Karena modulus berupa bilangan real non negatif, maka $\text{Range } g = \{x \mid x \geq 0\}$.

Latihan 1

1. Tentukan apakah fungsi berikut merupakan fungsi bernilai tunggal ataukah bernilai banyak. Jelaskan bagaimana cara anda menentukannya.

a. $f(z) = z^4$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

b. $g(z) = z^{1/4}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....

.....
.....
.....

i. $g(z) = |z^{1/4}|$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

j. $h(z) = |z^4|$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

k. $f(z) = z^2 + z^{1/2}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

l. $f(a + bi) = a - bi$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

m. $f(a + bi) = b + ai$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

n. $f(a + bi) = a^{1/2} + bi$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Setelah anda mengerjakan dari a sampai h, dapatkah anda simpulkan ciri-ciri suatu fungsi kompleks bernilai tunggal atau bernilai banyak?

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

2. Jika diketahui $f(z)=3z$.

a. Tentukan $f(2)$, $f(3i)$, $f(2+3i)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-i)$, prapeta dari $3i$, prapeta dari $6+9i$, dan prapeta dari $1!$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

b. Tentukan Range dari f , jika Domain f adalah C . Jelaskan bagaimana anda menentukannya.

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

c. Jika diketahui Range $f =\{2+yi \mid y\in R\}$, tentukan Domain f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Jika diketahui Domain f adalah A dengan $A = \{x+yi \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2+y^2=1\}$, tentukan Range f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

d. Jika diketahui Range $f = \{x+yi \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2+y^2=1\}$, tentukan Domain f . Jelaskan bagaimana cara anda mendapatkannya.

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

e. Sifat-sifat apa yang dapat anda temukan dari fungsi f !

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Jika diketahui $f(z)=(2+i)z - 3i$.
a. Tentukan $f(i)$, $f(1+i)$, $f(1)$, prapeta dari $-1 - i$, prapeta dari 1 , prapeta dari $2-2i$!
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

- b. Tentukan Range f jika Domain $f= \{a+0i \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Jelaskan cara anda mendapatkannya.
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

- c. Tentukan Domain f jika Range $f= \{a+0i \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Jelaskan cara anda mendapatkannya.
Penyelesaian:

.....
.....

.....
.....
.....
.....

4. Jika diketahui $g(z)=z^2$. Tentukan $g(2i)$, $g(i)$, $g(0)$, $g(-i)$, $g(-2i)$, prapeta dari -1 dan prapeta dari -4 !

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. Jika diketahui $g(z)=z^{1/2}$. Tentukan $g(i)$ dan $g(4)$ serta prapeta dari $\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan prapeta dari $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}$!

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

6. Hubungan apa saja yang anda dapatkan dari Domain, Range, jenis fungsi !
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7. Buatlah bagan atau peta konsep secara dua arah dari hasil yang telah anda pelajari terkait fungsi bernilai tunggal, fungsi bernilai banyak dengan Domain, dan Range! Kemudian berikan penjelasan pada skema yang Anda buat!
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....

Materi 2 : INVERS FUNGSI KOMPLEKS

Sebelum mempelajari materi invers fungsi kompleks, perlu diingat kembali tentang fungsi kompleks yang telah dibahas pada pertemuan sebelumnya.

Misalkan himpunan A dan himpunan B masing-masing adalah subset dari himpunan bilangan kompleks, maka fungsi kompleks f dari A ke B adalah relasi yang memasangkan setiap bilangan kompleks z di A dengan bilangan kompleks di B . Himpunan A disebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut kodomain (Daerah kawan) dan $\{w \mid f(z) = w, \forall z \in A\}$ adalah Range (daerah hasil) pada fungsi kompleks.

Terdapat dua jenis fungsi kompleks berdasarkan hasil pemetaan, yaitu fungsi kompleks bernilai tunggal dan fungsi kompleks bernilai banyak. (1) Jika setiap bilangan kompleks z di A dipasangkan dengan tepat satu dengan bilangan kompleks di B maka fungsi f disebut fungsi kompleks bernilai tunggal. (2) Jika bilangan kompleks z di A dipasangkan dengan dengan lebih dari satu bilangan kompleks di B maka disebut fungsi kompleks bernilai banyak.

Definisi invers fungsi kompleks

Jika $f: C \rightarrow C$ adalah fungsi kompleks dengan $f = \{(z, w) \mid f(z) = w, \text{ untuk } z \in C\}$ maka invers fungsi kompleks f dinotasikan dengan f^{-1} adalah $f^{-1} = \{(w, z) \mid f(z) = w\}$

Contoh 1:

Jika $f(z) = z + i$ maka invers dari $f(z)$ adalah $f^{-1}(z) = z - i$

Penjelasan:

Diketahui $f(z) = z + i$ maka $f = \{(z, w) \mid w = f(z) = z + i\} = \{(z, z + i) \mid z \in C\}$

Sehingga $f^{-1} = \{(z + i, z) \mid z \in C\} = \{(z, z - i) \mid z \in C\}$.

Atau dengan cara lain, misalkan $f(z) = w = z + i$ maka berdasarkan definisi invers fungsi diperoleh bahwa $w - i = z$ sehingga $w - i = f^{-1}(w)$ atau $f^{-1}(z) = z - i$.

Dapat kita lihat bahwa 0 dipetakan ke i oleh f , dan $1+2i$ akan dipetakan ke $1+3i$ oleh f . Sementara itu, i direlasikan dengan 0 oleh f^{-1} dan $1+3i$ direlasikan ke $1+2i$ oleh f^{-1} .

Contoh 2:

Jika $f(z) = 2zi$ maka invers dari $f(z)$ adalah $f^{-1}(z) = \frac{z}{2i}$

Penjelasan:

Diketahui $f(z) = 2zi$

Misalkan $f(z) = w$ maka berdasarkan definisi invers fungsi diperoleh bahwa $\frac{w}{2i} = z$ sehingga $\frac{w}{2i} = f^{-1}(w)$ atau $f^{-1}(z) = \frac{z}{2i}$

Latihan 2

1. Tentukan invers dari fungsi-fungsi berikut! kemudian beri penjelasan dari jawaban anda!

a) $f_1(z) = 2z - i$

Penyelesaian:

.....

b) $f_2(z) = z^2 + 3i$

Penyelesaian:

.....

c) $f_3(z) = 2\sqrt[3]{zi}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) $f_4(z) = \left(\frac{1}{z} - 3i\right)^3$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

e) $f_5(z) = \sqrt{z}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Jika diketahui invers suatu fungsi adalah berikut ini, maka tentukan fungsinya. Jelaskan bagaimana anda mendapatkannya.

a) $f^{-1}(z) = 2z - i$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

b) $f^{-1}(z) = z^2 + 3i$
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

c) $f^{-1}(z) = \frac{1}{2}(z + i)$
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) $f^{-1}(z) = \frac{1+i}{z}$
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....

.....
.....

e) $f^{-1}(z) = z^2$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

f) $f^{-1}(z) = 2(z - i)$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

g) $f^{-1}(z) = \sqrt{z - 3i}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

h) $f^{-1}(z) = \frac{z^3}{8i}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

i) $f^{-1}(z) = 2^3 \sqrt{\frac{1}{z} - 3i}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Tentukan invers dari fungsi kompleks berikut!

a) $m(z) = \frac{1}{2}(z + i)$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

b) $n(z) = \sqrt{z - 3i}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....

.....
.....

c) $p(z) = \frac{z^3}{8i}$

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Analisa kembali hasil pekerjaan anda pada nomor soal 1, 2, dan 3! Kemudian temukan sifat invers fungsi! Beri penjelasan!

Penjelasan:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. Pikirkan apakah menurut anda setiap fungsi kompleks baik bernilai tunggal maupun bernilai banyak selalu memiliki invers? Jelaskan.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. Buatlah skema atau peta konsep secara dua arah dari hasil yang telah anda pelajari terkait fungsi kompleks dan invers fungsi kompleks! beri penjelasan dari skema yang telah anda buat!

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3.1 BAGIAN REAL DAN BAGIAN IMAJINER DARI FUNGSI KOMPLEKS

Sebelum mempelajari materi bagian real dan bagian imajiner dari fungsi kompleks, perlu diingat kembali tentang bilangan kompleks.

Ingat bahwa bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a + ib$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i^2 = -1$. Misalkan $z = a + ib$ adalah bilangan kompleks maka a disebut bagian real dari z yang dinotasikan dengan $\operatorname{Re}(z) = a$ dan b disebut bagian imajiner dari z yang dinotasikan dengan $\operatorname{Im}(z) = b$.

Hal ini juga berlaku untuk fungsi kompleks yaitu memiliki bagian real dan bagian imajiner. Misalkan $z = x + iy$ dan $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i(v(x, y))$ adalah fungsi kompleks, maka **bagian real** dari $f(x, y)$ adalah $u(x, y)$ dinotasikan $\operatorname{Re}(f(x, y)) = u(x, y)$ dan **bagian imajiner** dari $f(x, y)$ adalah $v(x, y)$ dinotasikan $\operatorname{Im}(f(x, y)) = v(x, y)$.

Dengan mengamati bagian real dan bagian imajiner suatu fungsi terkadang membantu dalam menganalisa sifat suatu fungsi, seperti yang akan dibahas berikut ini.

Contoh 1:

Jika $f(x, y) = 2x + 2yi + 3i$ maka $\operatorname{Re}(f(x, y)) = 2x$ dan $\operatorname{Im}(f(x, y)) = 2y + 3$

Contoh 2:

$g(z) = z^2 + i$ maka $g(x, y) = (x + yi)^2 + i = (x^2 - y^2) + (2xy)i + i = (x^2 - y^2) + (2xy + 1)i$ sehingga $\operatorname{Re}(g(x, y)) = (x^2 - y^2)$ dan $\operatorname{Im}(g(x, y)) = (2xy + 1)$.

3.2 REPRESENTASI GEOMETRIS FUNGSI KOMPLEKS

Berbeda dengan fungsi real yang secara geometris direpresentasikan pada satu bidang saja, yaitu bidang

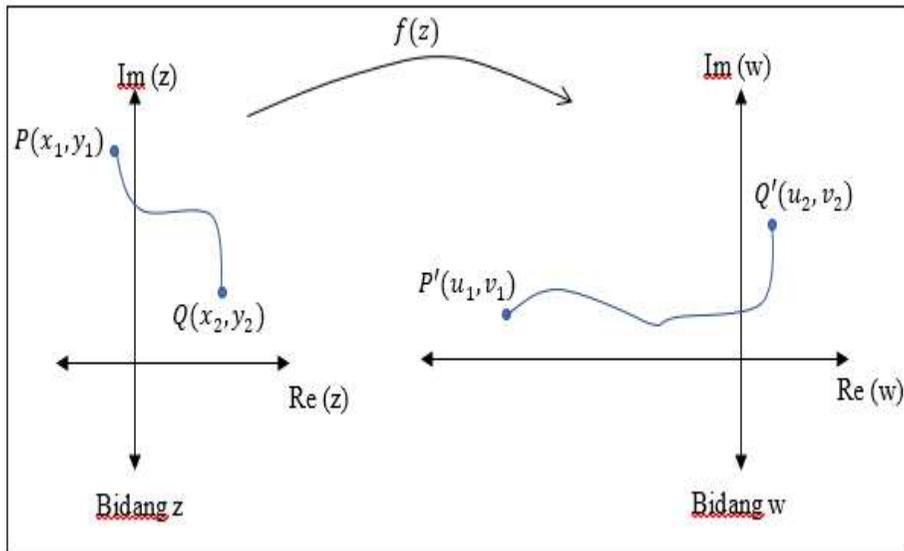
koordinat XOY. Sumbu X merepresentasikan domain pada fungsi real dan sumbu Y merepresentasikan kodomain pada fungsi real. Pada fungsi kompleks, untuk merepresentasikan suatu fungsi kompleks membutuhkan dua bidang kompleks, yaitu bidang kompleks yang merepresentasikan domain atau biasa disebut dengan bidang z dan bidang kompleks yang merepresentasikan range atau hasil transformasi dari domain melalui fungsi kompleks $f(z)$ atau biasa disebut dengan bidang w .

Jika $f(z) = w$ maka z adalah elemen di domain yang oleh f ditransformasikan ke w sehingga w disebut juga sebagai hasil transformasi dari z melalui f .

Dengan mengamati perubahan bentuk geometris dari daerah Domain dan Range oleh suatu fungsi akan dapat terlihat sifat-sifat fungsi kompleks tersebut. Misalkan apakah suatu fungsi bersifat mengawetkan setiap garis atau merubah bentuk garis menjadi kurva lengkung. Apakah suatu fungsi mengawetkan bentuk lingkaran dan sebagainya.

Contoh 1:

Misalkan hasil transformasi dari suatu titik $z = (x, y)$ melalui fungsi $f(z)$ adalah $w = (u, v)$, maka secara geometri titik z digambarkan pada bidang z sedangkan hasil transformasinya, yaitu w digambarkan pada bidang w . Gambar 1 berikut adalah gambaran transformasi dari suatu titik z melalui suatu fungsi kompleks f .



Gambar 1. Gambaran transformasi dari suatu titik z melalui suatu fungsi kompleks $f(z)$

Gambar 1 merupakan representasi secara geometri dari fungsi kompleks f , dimana domain dari f adalah sebuah garis dengan titik awal $P(x_1, y_1)$ dan titik akhir $Q(x_2, y_2)$ yang digambarkan pada bidang z . Hasil transformasi dari domain adalah sebuah garis dengan titik awal $P'(u_1, v_1)$ dan titik akhir $Q'(u_2, v_2)$ yang digambarkan pada bidang w .

Contoh 2:

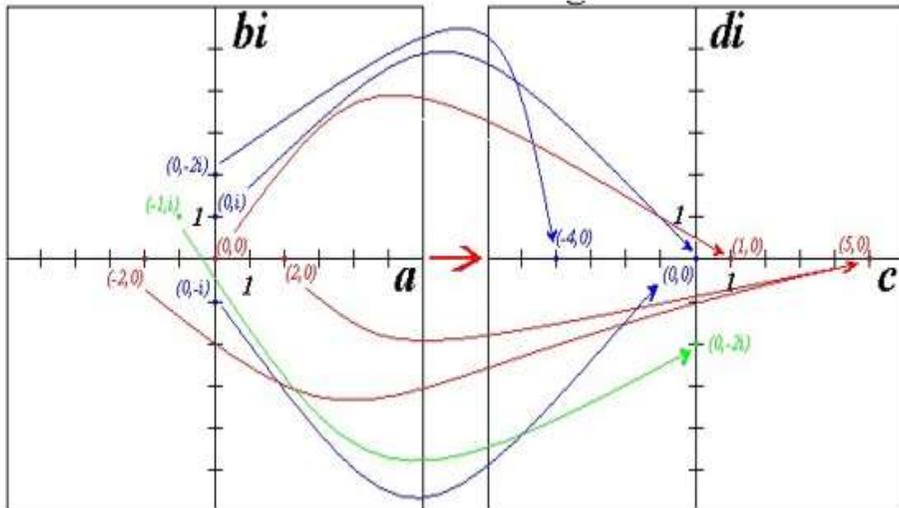
Misalkan diberikan fungsi f dengan $f(z) = z^2 + 1$.

Jika $z=0 = 0+0i$ maka oleh f akan ditransformasikan ke $f(0)= 1+0i$.

Jika $z=i=0+i$ atau $z=-i$ maka oleh f akan ditransformasikan ke $f(i)=f(-i)=0=0+0i$.

Jika $z=-2$ atau $z=2$ maka oleh f akan ditransformasikan ke $f(-2)=f(2)=5 =5+0i$.

Gambar 2 berikut merupakan ilustrasi transformasi dari beberapa titik melalui fungsi kompleks $f(z) = z^2 + 1$ pada bidang kompleks.



Gambar 2. Ilustrasi transformasi dari beberapa titik kompleks melalui fungsi kompleks $f(z) = z^2 + 1$ pada bidang kompleks

Contoh 3:

Misalkan diberikan fungsi f dengan $f(z) = z^2$.

Bagian real dari f atau $\text{Re}(f(x,y)) = x^2 - y^2$ dan Bagian imajiner dari f atau $\text{Im}(f(x,y)) = 2xy$.

Jika Domain f adalah $A = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 2\}$ maka Range f dapat ditentukan berdasar bagian real dan imajiner f , dengan memasukkan nilai y sama dengan 0, sehingga diperoleh $\text{Re}(f(A)) = x^2$ dan $\text{Im}(f(A)) = 0$. Jadi Range $f(A) = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 4\}$. Secara geometris, fungsi f mentransformasi segmen garis pada sumbu real positif dengan panjang 2 ke segmen garis pada sumbu real positif dengan panjang 4.

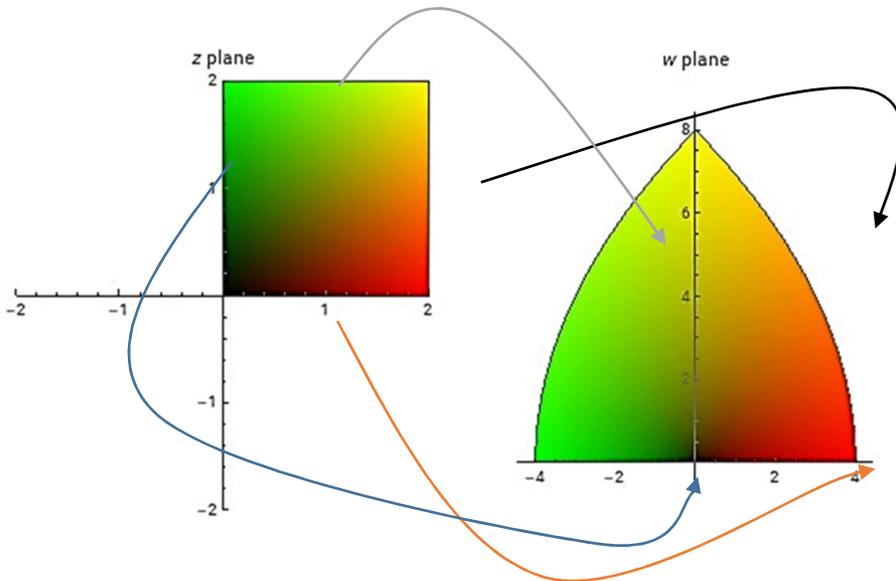
Jika Domain f adalah $B = \{(0,y) | 0 \leq y \leq 2\}$ maka dengan memasukkan nilai $x=0$ ke bagian real dan imajiner fungsi f akan diperoleh $\text{Re } f(B) = -y^2$ dan $\text{Im} f(B) = 0$ sehingga Range $f(B) = \{(x,0) | -4 \leq x \leq 0\}$. Secara geometris, fungsi f mentransformasi segmen garis pada sumbu imajiner (sumbu vertical pada bidang kompleks) dengan panjang 2 ke segmen garis pada sumbu real negatif dengan panjang 4.

Jika Domain f adalah $C = \{(2,y) | 0 \leq y \leq 2\}$ maka dengan memasukkan nilai $x=2$ ke bagian real dan imajiner fungsi f akan diperoleh $\text{Re } f(C) = 4 - y^2$ dan $\text{Im} f(C) = 4y$ sehingga Range $f(C) = \{(4 - y^2, 4y) | 0 \leq y \leq 2\}$, yaitu kurva lengkung dari titik $(4,0)$ yang diperoleh dengan menggantikan $y=0$ ke titik $(0,8)$ yang diperoleh dengan menggantikan nilai $y=2$. Secara geometris, fungsi f mentransformasi segmen garis vertical pada $x=2$ dengan panjang 2 ke kurva lengkung dari titik $(4,0)$ ke titik $(0,8)$.

Jika Domain f adalah $D = \{(x,2) | 0 \leq x \leq 2\}$ maka dengan memasukkan nilai $y=2$ ke bagian real dan imajiner fungsi f akan diperoleh $\text{Re } f(D) = x^2 - 4$ dan $\text{Im } f(D) = 4x$ sehingga Range $f(D) = \{(x^2 - 4, 4x) | 0 \leq x \leq 2\}$, yaitu kurva lengkung dari titik $(-4,0)$ yang diperoleh dengan menggantikan $x=0$ ke titik $(0,8)$ yang diperoleh dengan menggantikan nilai $x=2$. Secara geometris, fungsi f mentransformasi segmen garis horisontal pada $y=2$ dengan panjang 2 ke kurva lengkung dari titik $(-4,0)$ ke titik $(0,8)$.

Jadi jika digabungkan maka f mentransformasi bentuk persegi ABCD menjadi bentuk kurva tertutup seperti yang digambarkan berikut ini. Jadi fungsi $f = z^2$ tidak mengawetkan garis lurus karena tidak semua garis lurus ditransformasikan ke garis lurus juga.

Coba anda analisa apakah fungsi f mengawetkan bentuk lingkaran.



Gambar 3. Ilustrasi fungsi $f=z^2$ yang mentransformasikan persegi ke bentuk kurva tertutup.

3.3 MENERAPKAN SOFTWARE UNTUK MEREPRESENTASIKAN FUNGSI KOMPLEKS SECARA GEOMETRIS

Terkadang untuk menentukan bentuk geometris suatu fungsi atau sifat dari fungsi terhadap berbagai macam bentuk geometris sulit untuk dilihat secara manual, sehingga dengan bantuan ICT atau software akan memudahkannya. Oleh karena itu **penggunaan ICT (software)** dalam menggambar suatu fungsi kompleks bisa lebih efektif dan efisien serta memudahkan untuk mengamati dan menganalisa sifat-sifat fungsi kompleks.

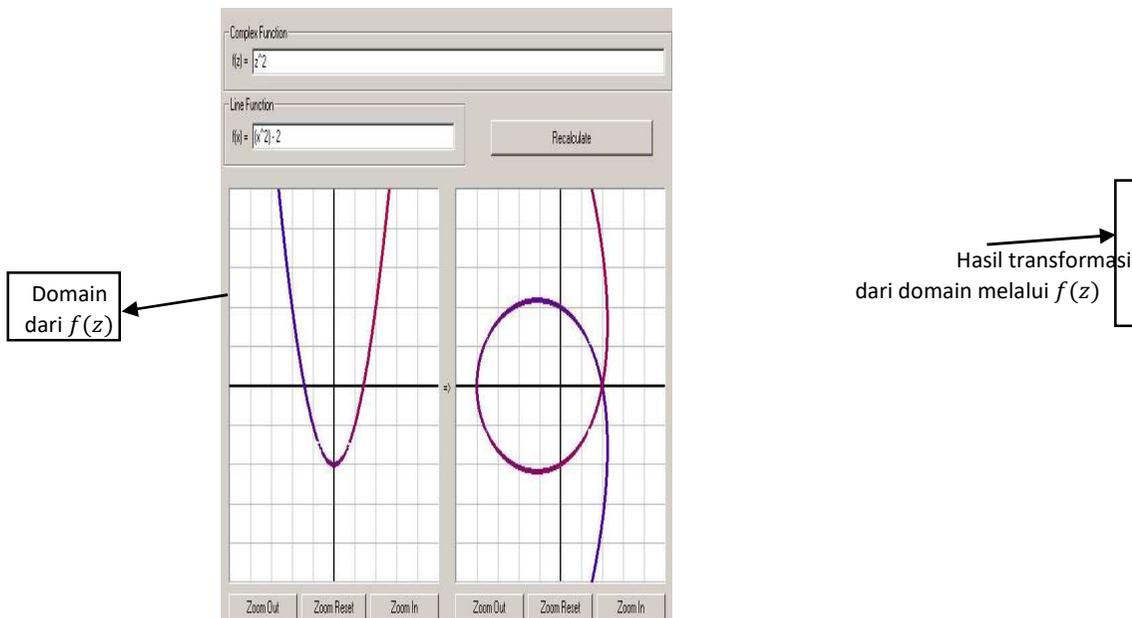
Ada beberapa software yang bisa dipakai untuk merepresentasikan fungsi kompleks secara geometris, beberapa di antaranya adalah sebagai berikut.

1. Representasi fungsi kompleks dengan menggunakan software Complex Graphing Calculator – Jason Fieldman

Berikut ini adalah contoh representasi fungsi kompleks secara geometri dengan menggunakan software Complex Graphing Calculator – Jason Fieldman.

a. Misal diberikan fungsinya adalah $f(z) = z^2$

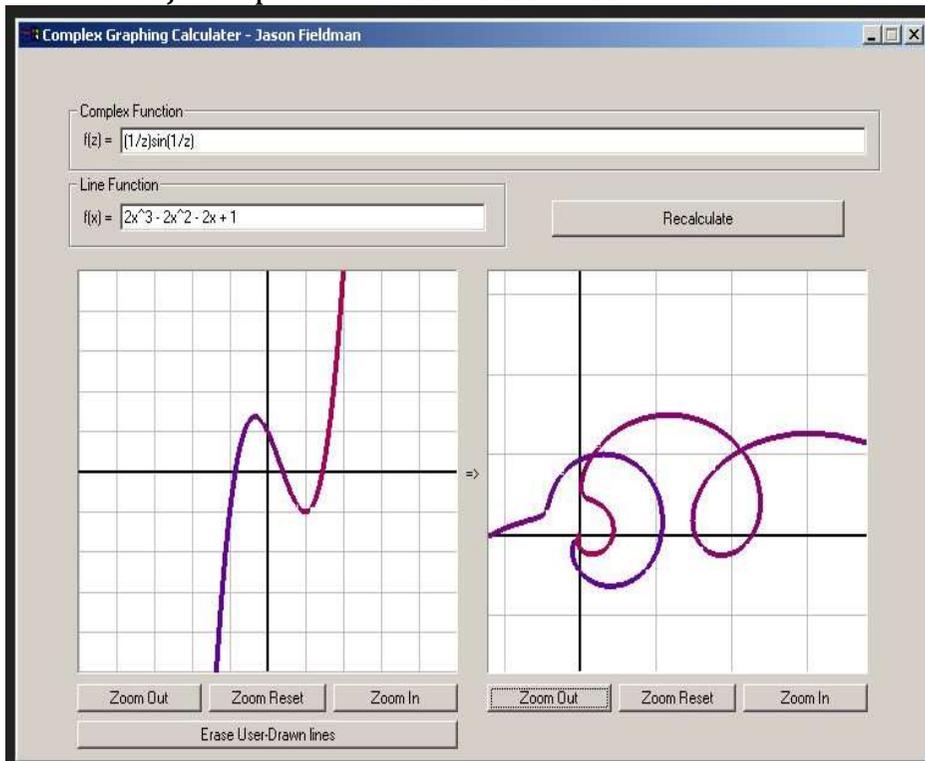
Jika domain f berupa parabola maka dengan menggunakan software tersebut dapat diketahui bahwa f mentransformasi parabola ke bentuk kurva seperti disajikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Representasi $f(z) = z^2$ secara geometri dengan menggunakan software Complex Graphing Calculator – Jason Fieldman

b. Misal diberikan fungsinya adalah $f(z) = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$.

Dengan menggunakan software tersebut dapat diketahui bahwa f mentransformasi kurva di sebelah kiri ke bentuk kurva sebelah kanan seperti disajikan pada Gambar 5 berikut.

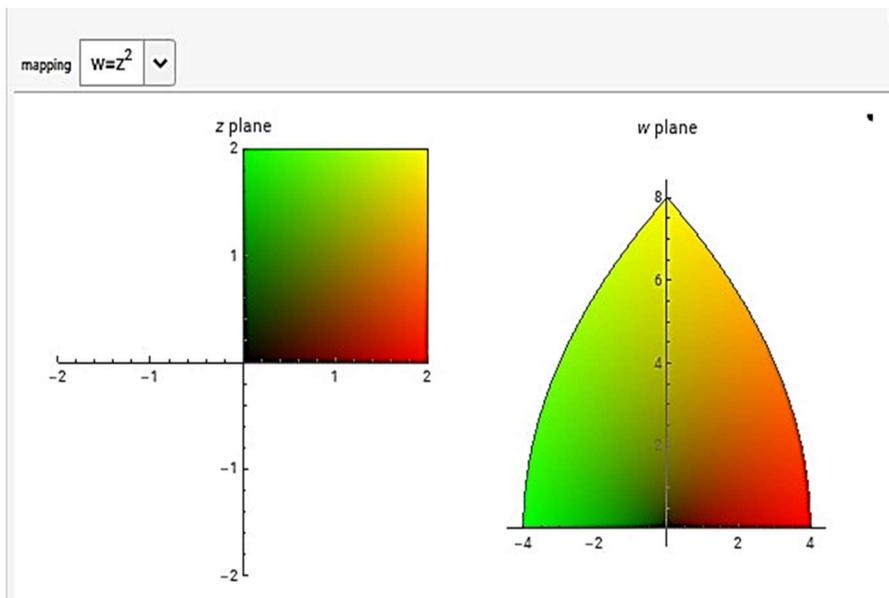


Gambar 5. Representasi $f(z) = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$ secara geometri dengan menggunakan software Complex Graphing Calculator – Jason Fieldman

2. Representasi fungsi kompleks dengan menggunakan software Wolfram Demonstration Project

Berikut ini adalah beberapa contoh representasi fungsi kompleks secara geometris dengan menggunakan software Wolfram Demonstration Project.

Seperti telah dibahas pada Contoh 3 di atas, fungsi $f(z) = z^2$ mentransformasi persegi dengan Panjang sisi 2 ke bentuk kurva tertutup. Berikut adalah hasil dengan menggunakan software Wolfram Demonstration project. Warna-warna pada kedua bidang tersebut digambarkan **saling berkorelasi**, dimana warna A pada bangun datar di bidang w merupakan hasil transformasi dari domain warna yang sama melalui fungsi $f(z) = z^2$. Misalnya **warna merah** pada bangun datar di bidang w merupakan hasil transformasi dari domain **warna merah** melalui fungsi $f(z) = z^2$. Begitu pula untuk **warna kuning** pada bangun datar di bidang w juga merupakan hasil transformasi dari domain **warna kuning** melalui fungsi $f(z) = z^2$. Hal tersebut juga berlaku untuk warna-warna yang lain pada kedua bangun tersebut.

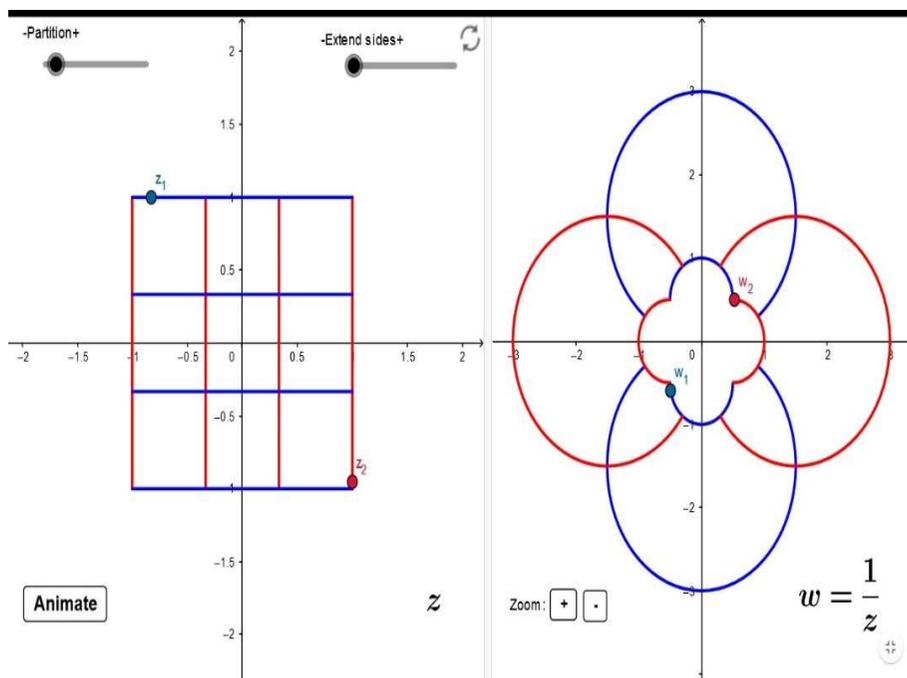


Gambar 6. Representasi $f(z) = z^2$ secara geometri dengan menggunakan software Wolfram Demonstration Project

3. Representasi fungsi kompleks dengan menggunakan software Geogebra online

Berikut ini adalah contoh representasi fungsi kompleks secara geometri dengan menggunakan software geogebra online.

Misal diberikan fungsinya adalah $f(z) = \frac{1}{z}$. Berdasar hasil yang diperoleh dapat terlihat bahwa fungsi f mentransformasi segmen-segmen garis vertical warna merah ke bentuk kurva lengkung warna merah dan mentransformasi segmen horizontal warna biru ke kurva lengkung warna biru seperti disajikan pada Gambar 7 berikut.



Gambar 7. Representasi fungsi kompleks $f(z) = \frac{1}{z}$ secara geometri dengan menggunakan software geogebra

Jadi seperti yang terlihat dengan menggunakan software atau ICT kita dapat mempelajari sifat-sifat fungsi dengan lebih mendalam, dan memudahkan untuk menguji apakah hipotesis kita terkait sifat fungsiberlaku ataukah tidak.

Latihan 3

1. Jika diberikan fungsi berikut

a) $f(z) = iz^2 - 2$

b) $f(x, y) = i(2x + yi)^2 - 2$

c) $f(x + iy) = (x + iy)^2 + 3i(x + iy)$

d) $f(z) = i(z - i)^2 - 2$

maka tentukan bagian real dan bagian imajiner dari fungsi-fungsi tersebut!

Penyelesaian:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Tentukan sifat yang dimiliki oleh bagian real dan bagian imajiner dari suatu fungsi kompleks!

Penyelesaian:

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. Apakah anda dapat menentukan suatu fungsi kompleks bernilai tunggal atau banyak berdasar bagian real dan imajinernya? Jelaskan jawaban anda.

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. Diketahui $f(z) = 2z$.

a. Misalkan $A = \{2 + yi \mid y \in R\}$. Tentukan $f(A)$, kemudian gambarkan A dan $f(A)$ pada bidang kompleks

Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

b. Misalkan $P = \{x + 3i \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tentukan $f(P)$, kemudian gambarkan P dan $f(P)$ pada bidang kompleks !
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

c. Misalkan $Q = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ dan } x^2 + y^2 = 1\}$. Tentukan $f(Q)$ dan gambarkan Q dan $f(Q)$ pada bidang kompleks!
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....

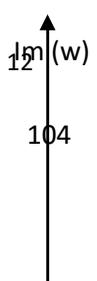
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. Jika $f(z) = z^2$ maka gambarkan hasil transformasi dari $z_1 = -1 - 2i$ dan $z_2 = 3 + i$ pada bidang kompleks!

Penyelesaian :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6. Diketahui $f(z) = z^2$, jika hasil transformasi dari z melalui $f(z)$ digambarkan pada grafik berikut, maka tentukan z , kemudian gambarkan z pada bidang kompleks!



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

8. Diketahui $g(z) = z^2$.
- a. Misalkan \overline{PQ} adalah ruas garis pada bidang kompleks dengan $P = 2i$, $Q = -2i$, gambarkan hasil peta dari \overline{PQ} di bidang kompleks! Jelaskan cara anda mendapatkannya

Penyelesaian:
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

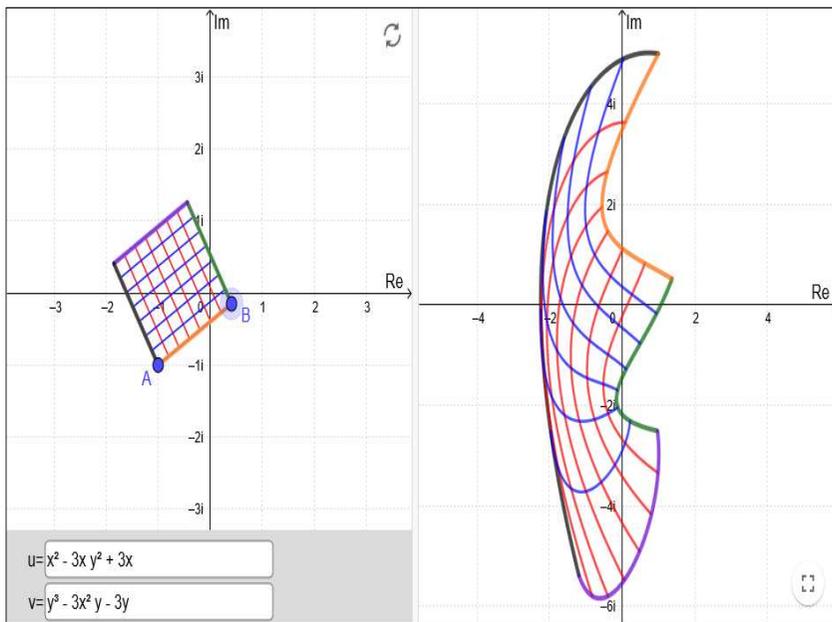
b. Apakah g mentransformasikan garis lurus ke garis lurus? Jelaskan pendapat anda!
Penyelesaian:

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

9. Jika diketahui $g(z) = z^{1/2}$, maka
a. Misalkan \overline{PQ} adalah ruas garis pada bidang kompleks dengan $P = 2i, Q = -2i$, gambarkan hasil transformasi

.....

 15. Gambar berikut merupakan representasi $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 3x + i(y^3 - 3x^2y - 3y)$ secara geometri dengan menggunakan software Geogebra



Berikan penjelasan terkait dua grafik pada gambar tersebut!
 Penyelesaian:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

17. Buatlah suatu fungsi yang mengawetkan garis. Ujilah jawaban anda dengan software yang anda pilih dan jelaskan jawaban anda.

Penyelesaian:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

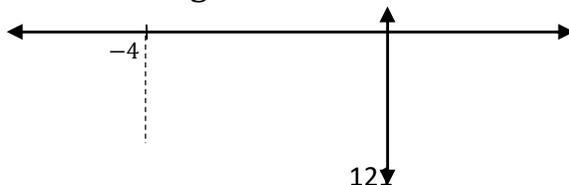
Lampiran 3: Contoh Tes Berpikir *Reversible*

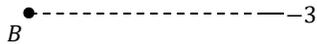
Tes Berpikir Reversible (TBR)

(waktu : 90 menit)

Petunjuk: Jawablah masalah-masalah berikut dengan jelas beserta cara penyelesaiannya pada Lembar Jawaban yang telah disediakan!

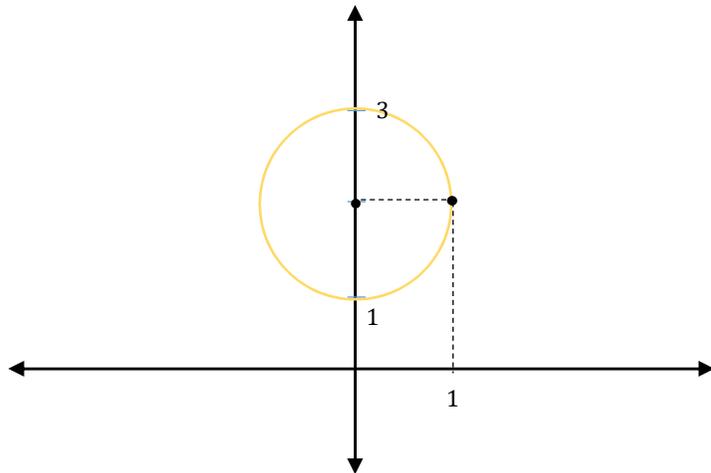
1. Jelaskan sifat yang dimiliki fungsi kompleks yang bernilai tunggal dan fungsi kompleks bernilai banyak!
2. Jika $f: A \rightarrow B$ dengan $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$ dan $A = \{0, i, 2\}$, maka tentukan Range f !
3. Jika $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$, dengan Range f adalah $\{0, i, 2\}$ maka tentukan Domain f !
4. Tentukan invers dari $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$!
5. Jika diketahui $f^{-1}(z) = \frac{2z+1}{z-1}$ maka tentukan $f(z)$!
6. Sebutkan sebuah sifat pada invers fungsi kompleks!
7. Tentukan bagian real dan bagian imajiner dari $f(z) = iz^2 + 2z$!
8. Diketahui daerah segiempat $PQRS$ pada bidang w dengan $P(0,0), Q(-2,2), R(-4,0)$, dan $S(-2,-2)$. Jika $PQRS$ merupakan hasil transformasi dari suatu daerah di bidang z melalui $f(z) = 2zi$. Gambarkan daerah di bidang z tersebut pada bidang kompleks!
9. Diketahui $f(z) = 2z - i$,
 - a. Gambarkan titik $K = 1 - 2i$ dan hasil transformasi dari K oleh fungsi f pada bidang kompleks!
 - b. Perhatikan gambar berikut!





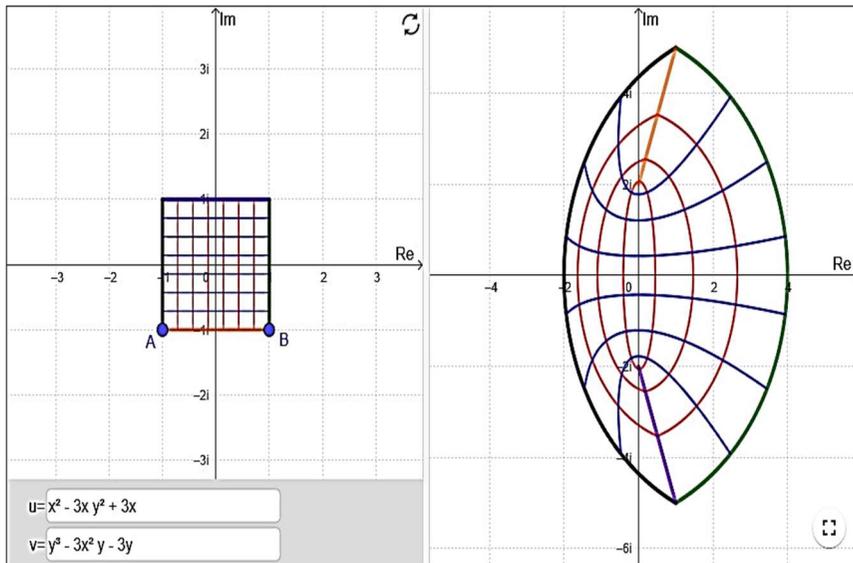
Jika titik B adalah hasil transformasi dari A maka tentukan A !

10. Perhatikan gambar berikut!



Gambarlah hasil transformasi dari lingkaran pada gambar di atas melalui fungsi $f(z) = z - i$!

11. Buatlah skema atau peta konsep secara dua arah tentang fungsi kompleks, invers fungsi kompleks, bagian real dan bagian imajiner dari fungsi kompleks, dan representasi fungsi kompleks secara geometri! Kemudian berikan penjelasan pada skema yang Saudara buat!
12. Gambar berikut merupakan representasi $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + 3x + i(y^3 - 3x^2y - 3y)$ secara geometri dengan menggunakan software Geogebra



Berikan penjelasan tentang hubungan antara dua grafik pada gambar tersebut!

.....Selamat Mengerjakan, Semoga Sukses.....